

## Algebran peruskurssi I, tentti 29.2.2016

Vastaa seuraavista tehtävistä NELJÄÄN! LASKINTA EI SAA KÄYTTÄÄ. Vastauksissa on oltava riittävä määrä laskuja näkyvillä, ts. arvaamalla saaduista ratkaisuksista ei saa pisteitä. Tentin kesto on noin 3 tuntia.

1. Laske Eukleideen algoritmilla alkion  $\overline{23}$  käänteisalkio ryhmässä  $\mathbb{Z}_{49}^*$ .
2. (a) Esitä todistukset äärellisiä ryhmiä koskeva Lagrangen lause.  
(b) Mitä tarkoitetaan alkion kertaluvulla? Miten Lagrangen lause ja alkion kertaluvun käsite liittyvät toisiinsa?  
(c) Laske alkion  $\overline{2}$  kertaluku ryhmässä  $\mathbb{Z}_{43}^*$ .
3. (a) Tarkastellaan kahdeksan alkion syklistä ryhmää  $C_8 = \langle c \rangle$  ja sen aliryhmää  $H = \langle c^4 \rangle$ . Kirjoita aliryhmän  $\langle c^4 \rangle$  sivuluokat ja tekijäryhmän  $C_8/\langle c^4 \rangle$  ryhmätaulu.  
(b) Tarkastellaan äärellistä ryhmää  $G = \langle c \rangle$ , missä  $\text{ord}(c) = n$ . Osoita, että jos  $c^m = 1$ , niin  $n \mid m$ .

4. Tarkastellaan polynomiavaruutta  $P_3 = \{a + bx + cx^2 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$  ja kuvausta

$$f : P_3 \rightarrow P_3, f(p(x)) = (x+1)p'(x),$$

missä  $p'(x)$  on tavallinen polynomin  $p(x)$  derivaatta. Oletetaan tunnetuksi, että  $f$  on lineaarikuvaus. Etsi kuvauksen  $f$  matriisi avaruuden  $P_3$  kannan  $\{1, x, x^2\}$  suhteen. Millainen joukko on  $\text{Ker}(f)$ ? Laske  $\dim \text{Ker}(f)$  ja  $\dim \text{Im}(f)$ .

5. (a) Olkoon  $G$  ryhmä ja  $f : G \rightarrow G$  homomorfismi. Todista, että joukko

$$\{a \in G \mid f(a) = a\}$$

on ryhmän  $G$  aliryhmä.

- (b) Tutkitaan ryhmää  $G = \mathbb{Z}_{11}^*$  ja kuvausta  $f : G \rightarrow G, f(x) = x^2$ . Miksi  $f$  on homomorfismi? Montako alkioita on aliryhmissä  $\text{Ker}(f)$  ja  $\text{Im}(f)$ ?