LOGIIKKA 24.10. 2014 (3h)

1 (a) Sovella Karnaugh'n karttaa propositioon

$$P = ((r \to \neg s) \to \neg(q \to \neg s)) \vee \neg(p \to (q \to r)).$$

(b) Kun Γ on propositiojoukko, ja P on propositio, milloin $\Gamma \models P$ on voimassa (määritelmän mukaan)? Esitä siis loogisen seurauksen määritelmä.
Olkoon propositiojoukko $\Gamma = \{p \wedge q, \neg r \vee s\}$. Onko $\Gamma \models P$ voimassa, kun P on kuten kohdassa (a)?

2 (a) Osoita, että propositiologiikan aksiomatiikassa on voimassa

$$\vdash_{\text{ax}} \neg P \to (P \to (\neg P \to Q)).$$

(b) Olkoon Γ äärellinen propositiojoukko ja P propositio. Osoita, että

$$\Gamma \models P \Longleftrightarrow \Gamma \vdash_{\text{ax}} P.$$

3 Olkoot p, q ja r 1-paikkaisia relaatiosymboleja aakkostossa S, ja

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \forall x\,(p(x) \to r(x))\,, \\ \varphi_2 &= \forall x\,(\neg q(x) \to \neg r(x))\,, \\ \psi &= \forall x\,(p(x) \to q(x))\,. \end{aligned}$$

Osoita, että $\varphi_1, \varphi_2 \models \psi$.

4 (a) Olkoon $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot, \sigma, <, 0)$ luonnollisten lukujen tavanomainen Ar-struktuuri. Osoita, että relaatio

$$\{(n, m, t) \mid n, m, t \in \mathbb{N} \colon n + m = \sqrt{t}\}$$

on elementaarinen struktuurissa $\mathcal{N}$.

(b) Osoita, että tavanomaisen aritmetiikan aakkoston $Ar = (+, *, \sigma, <, 0)$ kaava

$$\varphi = \neg\forall x \exists y\,(y < x * \sigma(0))$$

on sekä toteutuva että kumoutuva.