LOGIIKKA 22.10. 2015 (3h)

$\boxed{1}$ Etsi propositiolle P minimaalinen DN-muoto Karnaugh'n kartan avulla, kun

$$P = ((\neg s \to (p \vee q)) \to \neg(s \to \neg p)) \vee \neg(r \to (r \vee p)).$$

$\boxed{2}$ (a) Osoita, että propositiologiikan aksiomatiikassa on voimassa

$$\vdash_{\mathrm{ax}} Q \to ((P \to \neg R) \to (\neg Q \to R)).$$

(b) Esitä propositiologiikan Kompaktisuuslause.

Todista propositiologiikan Kompaktisuuslause käyttämällä seuraavaa apulausetta:

Apulause. Olkoon $\Gamma \subseteq \mathrm{Prop}$ ja $P \in \mathrm{Prop}$.
$\Gamma \models P$ jos ja vain jos on olemassa äärellinen joukko Γ_0, jolle $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ ja $\Gamma_0 \models P$.

$\boxed{3}$ (a) Esitä loogisen seurauksen määritelmä, ts. jos φ ja ψ ovat ensimmäisen kertaluvun kaavoja, niin milloin $\psi \models \varphi$.
Anna esimerkki ensimmäisen kertaluvun logiikan kaavoista φ ja ψ, joille φ on kaavan ψ looginen seuraus, mutta ψ ei ole kaavan φ looginen seuraus.

(b) Olkoot p, q ja r 1-paikkaisia relaatiosymboleja symboliaakkostossa S, ja

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \forall x(\neg p(x) \to \neg q(x)) \\
\varphi_2 &= \exists x \neg(r(x) \to p(x)) \\
\psi &= \exists x \neg(r(x) \to q(x))
\end{aligned}$$

Osoita, että $\varphi_1, \varphi_2 \models \psi$.

$\boxed{4}$ (a) Olkoon $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot)$ luonnollisten lukujen struktuuri, missä $+^{\mathcal{N}}$ on lukujen tavanomainen yhteenlasku ja $\cdot^{\mathcal{N}}$ on lukujen tavanomainen kertolasku. Osoita, että relaatio

$$\{(n, m) \mid n, m \in \mathbb{N}\colon m = n + 1\}$$

on elementaarinen struktuurissa $\mathcal{N}$.

(b) Osoita, että tavanomaisen aritmetiikan aakkoston $Ar = (+, *, \sigma, <, 0)$ kaava

$$\varphi = \neg\forall x \exists y\, (x + y = \sigma(0))$$

on sekä toteutuva että kumoutuva.