

Lukuteoria, tentti 21.11.2016

Tenttiaika noin 4 tuntia

1. a) Ratkaise kongruenssi $15x \equiv 7 \pmod{311}$.

b) Onko 3 primitiivinen juuri $\pmod{17}$? Perustelee.

2. Käytä kiinalaisen jäännöslauseen todistuksen menetelmää ja etsi kaikki sellaiset kokonaisluvut n , jotka toteuttavat samanaikaisesti kongruenssit $n \equiv 3 \pmod{11}$, $n \equiv 10 \pmod{17}$ ja $n \equiv 2 \pmod{19}$.

3. a) Laske Legendren symbolin

$$\left(\frac{15}{71}\right)$$

arvo.

b) Oletetaan, että $p > 2$ on alkuluku. Osoita, että jokaiselle kokonaisluvulle a pätee

$$a^{(p-1)/2} \equiv \left(\frac{a}{p}\right) \pmod{p}.$$

4. a) Määrittele Liouvilien funktio $\lambda(n)$ ja Möbiuksen funktio $\mu(n)$. Osoita, että Liouvilien funktion $\lambda(n)$ käänteisalkio konvoluution suhteen on $|\mu(n)|$.

b) Olkoon s mikä tahansa positiivinen kokonaisluku. Osoita, että on olemassa s peräkkäistä positiivista kokonaislukua, joista mikään ei ole neliövapaa.