Lukuteoria

26. 10. 2016

4 tuntia

Laskukoneen käyttö kielletty!

1. (A.1) Osoita, että $9|a$ aina, kun $2a^2 = 3b^3$.

(A.2) Osoita, että $-4 \not\equiv a^3 + b^3 + c^3 \not\equiv 4 \pmod 9$.

(B) Osoita, että a:n ja b:n s.y.t. on pienin positiivinen luku, joka on muotoa $xa + yb$.

2. Osoita, että $(\mu d) * E = (-1)^{\omega}$, kun μ on Möbiuksen funktio, E on vakiofunktio, joka saa arvon 1, $d(n)$ on n:n tekijöiden ja $\omega(n)$ sen erilaisten alkutekijöiden lukumäärä aina, kun $n \in \mathbf{N}$.

3. (A) Esitä ja todista Eulerin lause.

(B) Oletetaan, että a kuuluu eksponenttiin $e \pmod n$ ja b eksponenttiin $f \pmod n$ ja että $(e, f) = 1$. Osoita, että ab kuuluu eksponenttiin $ef \pmod n$. Määritä $\mathrm{ord}_{31}(2)$, $\mathrm{ord}_{31}(-5)$ ja $\mathrm{ord}_{31}(21)$.

4. Ratkaise $x^2 + 7x + 11 \equiv 0 \pmod n$ niillä n:n arvoilla, joilla se on mahdollista, kun $12 \leq n \leq 28$.