

Matematiikan peruskurssi 2

Tentti, 19.12.2016

Tentin kesto: 3h.

Sallitut apuvälineet: kaavakokoelma ja laskin, joka ei kykene graafiseen/symboliseen laskentaan

Vastaa seuraavista viidestä tehtävästä *neljään*. Saat valita tehtävät vapaasti. Jos teet kaikki, neljä parasta huomioidaan.

1. a) Miten määritellään funktiot $\sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ja $\cos: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$? Käytä piirroksia apuna. Osoita suoraan määritelmästä, että $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.
- b) Osoita derivaatan määritelmän mukaan, että $D(\cos x) = -\sin x$.

2. Osoita induktiolla, että $2 + 5 + 8 + \dots + (3n - 1) = \frac{n(3n + 1)}{2}$ kaikilla luonnollisilla luvuilla $n \geq 1$.

Väitteen vasen puoli on siis summa $\sum_{i=1}^n (3i - 1)$.

(Pitää siis oikeasti käyttää induktiota, niin että induktio-oletus tulee käyttöön induktioväitteen todistuksessa.)

3. Millä x :n arvoilla on voimassa

a) $\left| \frac{x + 3}{3x + 1} \right| > 1$ b) $\log_3(x^3) = -\frac{3}{2}$ ($x > 0$)

c) $\frac{3^{1-x}}{\sqrt{3^{2x-4}}} > 9$ d) $|\tan 2x| < \sqrt{3}$?

4. Laske seuraavat raja-arvot ($\pm\infty$ hyväksytään), tai ilmoita, jos ei ole olemassa.

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x - 2}$ b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^4 + 3x^3 - x^2 - x}{x + 1}$ c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x - 1)}{x^2 - 1}$ d) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}$

5. a) Olkoon $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$. Etsi funktion lokaaliset (paikalliset) ääriarvot. Tutki ääriarvojen laatu. Mikä on funktion suurin ja pienin arvo (kun $x \geq 0$)?
- b) Laske käyrän $x^3y + 2xy^3 = 18$ pisteeseen $(1, 2)$ piirretyn tangentin kulmakerroin.