

Matematiikan peruskurssi 3

Tentti 13.3.2017 (~ 3 tuntia)

1. (a) Laske integraali

$$\int (x^2 + \frac{2}{x^2} + x\sqrt{x}) dx.$$

(Tässä oletetaan tietysti, että $x > 0$.)

- (b) Laske integraali

$$\int_0^1 \frac{4x^3 + 2x}{x^4 + x^2 + 1} dx.$$

2. (a) Perustele joko derivoimalla tai sijoituksella $t = x^2$ kaava

$$\int xe^{x^2} dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + C.$$

- (b) Ratkaise differentiaaliyhtälö $yy' = xe^{x^2}$.

3. Tarkastellaan aluetta $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$ ja funktiota $f(x, y) = x^2 - 2x + 1 + y^2$.

- (a) Piirrä kuva alueesta A ja laske funktion f molemmat osittaisderivaatat.

- (b) Etsi funktion f suurin arvo alueessa A .

4. (a) Olkoon $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funktio, jolla on ensimmäisen, toisen ja kolmannen kertaluvun derivaatat f' , f'' , f''' . Miten määritellään funktion f kolmannen asteen Taylorin polynomi kohdassa $x = 0$?

- (b) Mikä on funktion $x^2 + \sqrt{1+x^2}$ kolmannen asteen Taylorin polynomi kohdassa $x = 0$? Voit hyödyntää tunnettua Taylorin sarjaa

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 + \dots$$