Matematiikan peruskurssi 2

Tentti, 19.12.2016

Tentin kesto: 3h.
Sallitut apuvälineet: kaavakokoelma ja laskin, joka ei kykene graafiseen/symboliseen laskentaan

Vastaa seuraavista viidestä tehtävästä *neljään*. Saat valita tehtävät vapaasti. Jos teet kaikki, neljä parasta huomioidaan.

1. a) Miten määritellään funktiot sin: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja cos: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$? Käytä piirroksia apuna. Osoita suoraan määritelmästä, että $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.
   b) Osoita derivaatan määritelmän mukaan, että $D(\cos x) = -\sin x$.

Ratkaisu:

a) Määritelmät: ks. monisteen sivu s. 37 alkaen taulukon (aste vs. radiaanit) jälkeen. Tässä oli tärkeää (pisteen arvoista) mainita radiaanit (ks. määritelmä 2.32. edellisellä sivulla).

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$: koska piste $(\cos x, \sin x)$ on yksikköympyrän kehällä, niin ympyrän yhtälön nojalla $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. Myös Pyhtagoraan lause kelpaa tähän (sitähän käyttämällä johdetaan ympyrän yhtälö).

Huomautus. Moni oli käyttänyt suorakulmaista kolmiota funktioiden määrittelyyn. Tästäkin sai pisteitä, muttei täysiä.

Funktioiden kuvaajien hahmotelmista *ei* pysty näkemään identiteettiä $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. (Kuvaajaa käytetään siihen, että saadaan jokin käsitys funktion käyttäytymisestä, jotka sitten todistetaan käyttämällä funktion algebrallisia ominaisuuksia tai määritelmiä. Poikkeuksena suorat, jotka ova tarpeeksi yksinkertaisia, jotta niistä voidaan päätellä yksinkertaisia asioita.)

b) Olkoon $x_0 \in \mathbb{R}$ kiinnitetty. Halutaan osoittaa, että $\frac{d}{dx} \sin x\big|_{x=x_0} = \cos x_0$, jolloin väite seuraa.

Derivaatan määritelmän mukaan $f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Nyt $f = \cos$, joten, käyttämällä kaavakokoelman kaavaa, raja-arvon laskusääntöjä ja tulosta

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$, saadaan

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\cos x - \cos x_0}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{-2\sin\frac{x-x_0}{2}\sin\frac{x+x_0}{2}}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{-\sin\frac{x-x_0}{2}\sin\frac{x+x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}}$$

$$= -\lim_{x\to x_0}\frac{\sin\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}}\cdot\lim_{x\to x_0}\sin\frac{x+x_0}{2} = -1\cdot\sin\frac{2x_0}{2} = -\sin x_0.$$

$\square$

2. Osoita induktiolla, että $2+5+8+\ldots+(3n-1) = \dfrac{n(3n+1)}{2}$ kaikilla luonnollisilla luvuilla $n \geq 1$.

   Väitteen vasen puoli on siis summa $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(3i-1)$.

   (Pitää siis oikeasti käyttää induktiota, niin että induktio-oletus tulee käyttöön induktioväitteen todistuksessa.)

   Ratkaisu:

   - Induktion lähtökohta: Pitää todistaa, että väite on voimalla arvolla $n_0 = 1$. (Koska kaava pyydetään todistamaan kaikilla $n \geq \mathbf{1}$.)
     vasen puoli $= \sum_{i=1}^{1}(3i-1) = 3\cdot 1 - 1 = 2$. Oikea puoli $= \frac{1\cdot(3\cdot 1+1)}{2} = \frac{4}{2} = 2$. Väite on siis totta arvolla $n = 1$.
   - Induktio-oletus: väite on tosi arvolla $n = k$ jollain $k \geq 1$: $\sum_{i=1}^{k}(3i-1) = \frac{k(3k+1)}{2}$.
   - Induktioväite: väite on tosi arvolla $n = k+1$: $\sum_{i=1}^{k+1}(3i-1) = \frac{(k+1)(3(k+1)+1)}{2}$.

   Induktioväitteen todistus: Lähdetään vasemmalta puolelta liikkeelle.

$$\sum_{i=1}^{k+1}(3i-1) = \left[\sum_{i=1}^{k}(3i-1)\right] + (3(k+1)-1) = \left[\sum_{i=1}^{k}(3i-1)\right] + 3k + 2$$
$$\overset{\text{ind.ol.}}{=} \frac{k(3k+1)}{2} + 3k + 2 = \frac{k(3k+1)+2(3k+2)}{2}$$
$$= \frac{3k^2+k+6k+4}{2} = \frac{3k^2+7k+4}{2}.$$

   Pitää vielä osoittaa, että $3k^2+7k+4 = (k+1)(3(k+1)+1)$. Tehdään tämä avaamalla oikea puoli:

$$(k+1)(3(k+1)+1) = (k+1)(3k+4) = k(3k+4) + 1(3k+4)$$
$$= 3k^2+4k+3k+4 = 3k^2+7k+4.$$

   Siispä induktioväite on todistettu. Kaava on siis voimassa kaikilla $n \geq 1$. $\square$

Huomautus. Induktion lähtökohta on välttämätöntä tarkistaa!

Pitää ymmärtää mitä summa tarkoittaa. Kannattaa harjoitella muutamalla pienellä n:n arvolla varmistaakseen, että ymmärtää mitä tapahtuu.

Induktioväitteeseen kun sijoittaa $k+1$:n, on syytä pitää mielessä mitä ollaan oikeastaan todistamassa. Tämän näkee tehtävänannosta:

Väitetään, että kaava $\sum_{i=1}^{n}(3i-1) = \frac{n(3n+1)}{2}$ on totta kun $n = k+1$. Siispä sijoitetaan n:n tilalle $(k+1)$ ja tarkistetaan (käyttämällä induktio-oletusta).

3. Millä x:n arvoilla on voimassa

a) $\left|\dfrac{x+3}{3x+1}\right| > 1$ b) $\log_3(x^3) = -\dfrac{3}{2} \quad (x>0)$

c) $\dfrac{3^{1-x}}{\sqrt{3^{2x-4}}} > 9$ d) $|\tan 2x| < \sqrt{3}$?

a) Tähän on useampi ratkaisu. Tässä esitetään *foolproof*-versio käyttämällä itseisarvon ensimmäisiä ominaisuuksia.

Huomataan aivan ensimmäiseksi, että $x \neq -\frac{1}{3}$. Nyt

$$\left|\frac{x+3}{3x+1}\right| > 1 \Longleftrightarrow \frac{x+3}{3x+1} > 1 \quad \textbf{tai} \quad \frac{x+3}{3x+1} < -1.$$

Tarkastellaan ensimmäistä murtoepäyhtälöä:

$$\frac{x+3}{3x+1} > 1 \Longleftrightarrow \frac{x+3}{3x+1} - 1 > 0 \overset{\text{lavennus}}{\Longleftrightarrow} \frac{x+3}{3x+1} - \frac{3x+1}{3x+1} > 0$$
$$\frac{x+3-(3x+1)}{3x+1} > 0 \Longleftrightarrow \frac{2(1-x)}{3x+1} > 0.$$

Nyt täytyy siirtyä tarkastelemaan osoittajan ja nimittäjän merkkejä. Epäyhtälö toteutuu, kun molemmat saavat ovat joko negatiivisen tai positiivisen arvon.

	$x < -\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3} < x < 1$	$x > 1$
$2(1-x)$	$+$	$+$	$-$
$3x+1$	$-$	$+$	$+$
osamäärä.	$-$	$+$	$-$

Niinpä ensimmäinen murtoepäyhtälö toteutuu kun $-\frac{1}{3} < x < 1$.

Toinen murtoepäyhtälö: aivan samaan tapaan saadaan

$$\frac{x+3}{3x+1} < -1 \Longleftrightarrow \frac{4(x+1)}{3x+1} < 0$$

Tarkastellaan jälleen osoittajan ja nimittäjän merkkejä.

	$x<-1$	$-1<x<-\frac{1}{3}$	$x>-\frac{1}{3}$
$4(x+1)$	$-$	$+$	$+$
$3x+1$	$-$	$-$	$+$
osamäärä.	$+$	$-$	$+$

Niinpä toinen murtoepäyhtälö toteutuu kun $-1<x<-\frac{1}{3}$.

Summa summarum, vastaus: $-1<x<-\frac{1}{3}$ tai $-\frac{1}{3}<x<1$.

b) Käyttämällä logartimin laskusääntöjä saadaan

$$\log_3(x^3)=-\frac{3}{2}\overset{\log x^y=y\log x}{\iff}3\log_3 x=-\frac{3}{2}\overset{:3}{\iff}\log_3 x=-\frac{1}{2}$$

Koska eksponenttifunktio 3^y on injektio ja $\log_3$ on tämän käänteisfunktio, saadaan vastaus

$$\log_3 x=-\frac{1}{2}\iff 3^{\log_3 x}=3^{-\frac{1}{2}}\iff x=3^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

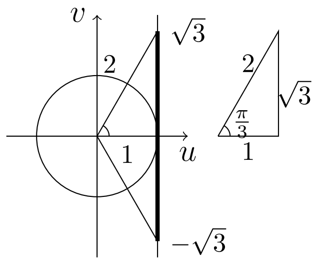
c) Sievennetään yhtälön vasenta puolta käyttämällä eksponenttifunktion laskusääntöjä,

$$\frac{3^{1-x}}{\sqrt{3^{2x-4}}}=\frac{3^{1-x}}{3^{\frac{2x-4}{2}}}=3^{1-x}3^{-(x-2)}=3^{1-x-(x-2)}=3^{-2x+3}.$$

Ottamalla puolittain kolmekantainen logaritmi (aidosti kasvava), saadaan

$$3^{-2x+2}>9\overset{\log_3\text{ kasv.}}{\iff}\log_3(3^{-2x+3})>\log_3 3^2\iff -2x+3>2\iff x<\frac{1}{2}.$$

d) Kysytään millä x:n arvoilla on voimassa $|\tan 2x|<\sqrt{3}$. Tässä voisi koittaa sieventää, mutta ei ole tarvetta. Kuten aina ennenkin, piirretään yksikköympyrä. Nyt $\tan 2x$ pitää kuulua tummennetulle alueelle. Huomataan, että kyseessä on erikoiskolmiot! Saadaan



$$|\tan 2x|<\sqrt{3}\iff -\tfrac{\pi}{3}+n\pi<2x<\tfrac{\pi}{3}+n\pi$$

Tässä ei tarvitse avata itseisarvoja! Edelleen sieventämällä saadaan

$$-\frac{\pi}{3}+n\pi<2x<\frac{\pi}{3}+n\pi\iff-\frac{\pi}{6}+n\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{6}+n\frac{\pi}{2}.$$

Huomautus. • Kun on saatu itseisarvot poistettua ja päästy murtoepäyhtälöihin, niin ei saa kertoa nimittäjällä kumpaakin puolta suoraan! Voisi olla niin, että nimittäjä on negatiivinen, jolloin suuruusrelaatio kääntyisi. Paras tapa on siirtää kaikki termit samalle puolelle, jolloin toiselle puolelle jää 0. Tämän jälkeen on helppo päätellä milloin lauseke saa negatiivisia tai positiivisia arvoja.

- Logaritmi on eksponenttifunktion käänteisfunktio, ei potenssifunktion. Potenssifunktion käänteisfunktio on juurifunktio.
- Muista aina piirtää yksikköympyrä kun ratkaiset trigonometrisiä yhtälöitä/epäyhtälöitä. Siitä saa pisteitä, ja se voi jopa johtaa tehtävän ratkaisuun.
- Joskus laitetaan sulkeet ympärille $\tan(2x)$, joskus ei $\tan 2x$. Tällä kuitenkin tarkoitetaan samaa. Kun tarkoitetaan $\tan 2 \cdot x$, niin kirjoitetaan $\tan(2)x$ tms. Tästä ei tietysti rankaistu, laitan tarkemmin seuraavaan tenttiin.

4. Laske seuraavat raja-arvot ($\pm\infty$ hyväksytään), tai ilmoita, jos ei ole olemassa.

$$\text{a) } \lim_{x\to 2} \frac{1}{x-2} \quad \text{b) } \lim_{x\to -1} \frac{3x^4+3x^3-x^2-x}{x+1} \quad \text{c) } \lim_{x\to 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2-1} \quad \text{d) } \lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

a) Ensinnäkin $\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$, sillä kun x lähestyy lukua 2 vasemmalta, saa nimittäjä negatiivisia, itseisarvoltaan yhä pienempiä ja pienempiä arvoja, jolloin lauseke saa negatiivisia, itseisarvoltaan yhä suurempia ja suurempia arvoja.

Toisaalta $\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} = \infty$, (samasta syystä, paitsi luvut ovat positiivisia). Siispä raja-arvoa **ei** ole olemassa pisteessä 2.

b) Nyt

$$\frac{3x^4+3x^3-x^2-x}{x+1} = \frac{3x^3(x+1)-x(x+1)}{x+1} = \frac{(3x^3+1)(x+1)}{x+1} = 3x^3+1.$$

Niinpä

$$\lim_{x\to -1} \frac{3x^4+3x^3-x^2-x}{x+1} = \lim_{x\to -1} 3x^3+1 = 3(-1)^3+1 = -2.$$

c) Käyttämällä tulosta $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ja raja-arvojen laskusääntöjä, saadaan

$$\lim_{x\to -1} \tfrac{\sin(x+1)}{x^2-1} = \lim_{x\to -1} \tfrac{\sin(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to -1} \tfrac{\sin(x+1)}{x+1} \cdot \lim_{x\to -1} \tfrac{1}{x-1} = 1 \cdot \tfrac{1}{-1-1} = -\tfrac{1}{2}.$$

d) ks. Demot V/t6.

Huomautus.
- Raja-arvoksi hyväksytään $+\infty$ **tai** $-\infty$, ei molempia.
- Muistetaan, että jos polynomilla $p(x)$ on nollakohta $x = r$, niin silloin $p(x) = (x-r)q(x)$ jollain toisella polynomilla $q(x)$. Näin ollen, jos jakokulmassa jää virheen takia jakojäännös, kannattaa aloittaa alusta ja miettiä missä kohtaa ajattelee väärin.
- Muistetaan, että $\lim_{x\to a} \frac{\sin(f(x))}{f(x)} = 1$, jos $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.

- Muistetaan, että $\lim_{x\to a}(1+\frac{1}{f(x)})^{f(x)} = e$, jos $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ **tai** $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$. Toisaalta, raja-arvoa ei tarvitse olla olemassa (esim $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$). Kuitenkin, tarkastelemalla raja-arvoja kummaltakin puolen voi raja-arvo $\lim_{x\to a}(1+\frac{1}{f(x)})^{f(x)}$ silti olla olemassa. Aina pitää kuitenkin tarkistaa toispuoleiset raja-arvot.

5. a) Olkoon $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$. Etsi funktion lokaaliset (paikalliset) ääriarvot. Tutki ääriarvojen laatu. Mikä on funktion suurin ja pienin arvo (kun $x \geq 0$)?

   b) Laske käyrän $x^3y+2xy^3 = 18$ pisteeseen $(1,2)$ piirretyn tangentin kulmakerroin.

Ratkaisu: a) Ks. demot VI/7.

b) Käytetään implisiittistä derivointia. Muistetaan, että y on x:n funktio (“kun x liikkuu, niin tekee myös y”). Muistetaan myös tulon derivaatan kaava $D(f\cdot g) = f'\cdot g + f\cdot g'$. Muistetaan myös yhdistetyn funktion derivaatan kaava $D(f\circ g) = f'(g(x))\cdot g'(x)$. (esim. $\frac{d}{dx}y^3 = 3y^2y'$.)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(x^3y+2xy^3) = \frac{d}{dx}(18) &\iff \frac{d}{dx}(x^3y) + \frac{d}{dx}(2xy^3) = 0\\
&\iff 3x^2\cdot y + x^3\frac{d}{dx}(y) + 2y^3 + 2x\frac{d}{dx}y^3 = 0\\
&\iff 3x^2y + x^3y' + 2y^3 + 2x\cdot 3y^2y' = 0\\
&\iff y'(x^3+6xy^2) + 3x^2y + 2y^3 = 0\\
&\iff y' = -\frac{3x^2y+2y^3}{x^3+6xy^2}.
\end{aligned}$$

Nyt kun sijoitetaan $x=1$ ja $y=2$ saadaan derivaatan arvo pisteessä $(1,2)$:

$$y'(1) = -\frac{3\cdot 1^2\cdot 2 + 2\cdot 2^3}{1^3+6\cdot 1\cdot 2^2} = -\frac{22}{25}.$$

$\square$

Matematiikan peruskurssi 2

Tentti, 19.12.2016

Tentin kesto: 3h.
Sallitut apuvälineet: kaavakokoelma ja laskin, joka ei kykene graafiseen/symboliseen laskentaan

Vastaa seuraavista viidestä tehtävästä *neljään*. Saat valita tehtävät vapaasti. Jos teet kaikki, neljä parasta huomioidaan.

1. a) Miten määritellään funktiot sin: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja cos: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$? Käytä piirroksia apuna. Osoita suoraan määritelmästä, että $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

   b) Osoita derivaatan määritelmän mukaan, että $D(\sin x) = \cos x$.

Ratkaisu:

a) Määritelmät: ks. monisteen sivu s. 37 alkaen taulukon (aste vs. radiaanit) jälkeen. Tässä oli tärkeää (pisteen arvoista) mainita radiaanit (ks. määritelmä 2.32. edellisellä sivulla).

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$: koska piste $(\cos x, \sin x)$ on yksikköympyrän kehällä, niin ympyrän yhtälön nojalla $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. Myös Pyhtagoraan lause kelpaa tähän (sitähän käyttämällä johdetaan ympyrän yhtälö).

Huomautus. Moni oli käyttänyt suorakulmaista kolmiota funktioiden määrittelyyn. Tästäkin sai pisteitä, muttei täysiä.

Funktioiden kuvaajien hahmotelmista *ei* pysty näkemään identiteettiä $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. (Kuvaajaa käytetään siihen, että saadaan jokin käsitys funktion käyttäytymisestä, jotka sitten todistetaan käyttämällä funktion algebrallisia ominaisuuksia tai määritelmiä. Poikkeuksena suorat, jotka ova tarpeeksi yksinkertaisia, jotta niistä voidaan päätellä yksinkertaisia asioita.)

b) Olkoon $x_0 \in \mathbb{R}$ kiinnitetty. Halutaan osoittaa, että $\frac{d}{dx} \cos x\big|_{x=x_0} = -\sin x_0$, jolloin väite seuraa.

Derivaatan määritelmän mukaan $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Nyt $f = \sin$, joten, käyttämällä kaavakokoelman kaavaa, raja-arvon laskusääntöjä ja tulosta

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, saadaan

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{2\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2}}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}}$$
$$= \lim_{x\to x_0} \frac{\sin\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}} \cdot \lim_{x\to x_0} \cos\frac{x+x_0}{2} = 1\cdot\cos\frac{2x_0}{2} = \cos x_0.$$

$\square$

2. Osoita induktiolla, että $2+5+8+\ldots+(3n-1) = \dfrac{n(3n+1)}{2}$ kaikilla luonnollisilla luvuilla $n \geq 1$.

   Väitteen vasen puoli on siis summa $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(3i-1)$.

   (Pitää siis oikeasti käyttää induktiota, niin että induktio-oletus tulee käyttöön induktioväitteen todistuksessa.)

Ratkaisu:

- Induktion lähtökohta: Pitää todistaa, että väite on voimalla arvolla $n_0 = 1$. (Koska kaava pyydetään todistamaan kaikilla $n \geq \mathbf{1}$.)
  vasen puoli $= \sum_{i=1}^{1}(3i-1) = 3\cdot 1 - 1 = 2$. Oikea puoli $= \frac{1\cdot(3\cdot 1+1)}{2} = \frac{4}{2} = 2$. Väite on siis totta arvolla $n = 1$.
- Induktio-oletus: väite on tosi arvolla $n = k$ jollain $k \geq 1$: $\sum_{i=1}^{k}(3i-1) = \frac{k(3k+1)}{2}$.
- Induktioväite: väite on tosi arvolla $n = k+1$: $\sum_{i=1}^{k+1}(3i-1) = \frac{(k+1)(3(k+1)+1)}{2}$.

Induktioväitteen todistus: Lähdetään vasemmalta puolelta liikkeelle.

$$\sum_{i=1}^{k+1}(3i-1) = \left[\sum_{i=1}^{k}(3i-1)\right] + (3(k+1)-1) = \left[\sum_{i=1}^{k}(3i-1)\right] + 3k+2$$
$$\overset{\text{ind.ol.}}{=} \frac{k(3k+1)}{2} + 3k + 2 = \frac{k(3k+1)+2(3k+2)}{2}$$
$$= \frac{3k^2+k+6k+4}{2} = \frac{3k^2+7k+4}{2}.$$

Pitää vielä osoittaa, että $3k^2+7k+4 = (k+1)(3(k+1)+1)$. Tehdään tämä avaamalla oikea puoli:

$$(k+1)(3(k+1)+1) = (k+1)(3k+4) = k(3k+4)+1(3k+4)$$
$$= 3k^2+4k+3k+4 = 3k^2+7k+4.$$

Siispä induktioväite on todistettu. Kaava on siis voimassa kaikilla $n \geq 1$. $\square$

Huomautus. Induktion lähtökohta on välttämätöntä tarkistaa!

Pitää ymmärtää mitä summa tarkoittaa. Kannattaa harjoitella muutamalla pienellä n:n arvolla varmistaakseen, että ymmärtää mitä tapahtuu.

Induktioväitteeseen kun sijoittaa $k+1$:n, on syytä pitää mielessä mitä ollaan oikeastaan todistamassa. Tämän näkee tehtävänannosta:

Väitetään, että kaava $\sum_{i=1}^{n}(3i-1) = \frac{n(3n+1)}{2}$ on totta kun $n = k+1$. Siispä sijoitetaan n:n tilalle $(k+1)$ ja tarkistetaan (käyttämällä induktio-oletusta).

3. Millä x:n arvoilla on voimassa

a) $\left|\dfrac{x+2}{2x+1}\right| > 1$ b) $\log_2(x^3) = -\dfrac{3}{2} \quad (x>0)$

c) $\dfrac{3^{-x}}{\sqrt{3^{2x-4}}} > 27$ d) $|\tan 2x| < \sqrt{3}$?

Ratkaisu: Aivan samalla tavalla kuin toisessa versiossa. Vakiot vain ovat eri. □

Huomautus. • Kun on saatu itseisarvot poistettua ja päästy murtoepäyhtälöihin, niin ei saa kertoa nimittäjällä kumpaakin puolta suoraan! Voisi olla niin, että nimittäjä on negatiivinen, jolloin suuruusrelaatio kääntyisi. Paras tapa on siirtää kaikki termit samalle puolelle, jolloin toiselle puolelle jää 0. Tämän jälkeen on helppo päätellä milloin lauseke saa negatiivisia tai positiivisia arvoja.

- Logaritmi on eksponenttifunktion käänteisfunktio, ei potenssifunktion. Potenssifunktion käänteisfunktio on juurifunktio.
- Muista aina piirtää yksikköympyrä kun ratkaiset trigonometrisiä yhtälöitä/epäyhtälöitä. Siitä saa pisteitä, ja se voi jopa johtaa tehtävän ratkaisuun.
- Joskus laitetaan sulkeet ympärille $\tan(2x)$, joskus ei $\tan 2x$. Tällä kuitenkin tarkoitetaan samaa. Kun tarkoitetaan $\tan 2 \cdot x$, niin kirjoitetaan $\tan(2)x$ tms. Tästä ei tietysti rankaistu, laitan tarkemmin seuraavaan tenttiin.

4. Laske seuraavat raja-arvot ($\pm\infty$ hyväksytään), tai ilmoita, jos ei ole olemassa.

a) $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{1}{x+2}$ b) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{3x^4-3x^3-x^2+x}{x-1}$ c) $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{\sin(x+1)}{x^2-1}$ d) $\lim\limits_{x\to0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$

Menevät aivan samalla tavalla kuin toisessa versiossa, eri vakioilla vain.

Huomautus. • Raja-arvoksi hyväksytään $+\infty$ **tai** $-\infty$, ei molempia.

- Muistetaan, että jos polynomilla $p(x)$ on nollakohta $x = r$, niin silloin $p(x) = (x-r)q(x)$ jollain toisella polynomilla $q(x)$. Näin ollen, jos jakokulmassa jää virheen takia jakojäännös, kannattaa aloittaa alusta ja miettiä missä kohtaa ajattelee väärin.
- Muistetaan, että $\lim_{x\to a} \frac{\sin(f(x))}{f(x)} = 1$, jos $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.
- Muistetaan, että $\lim_{x\to a}(1 + \frac{1}{f(x)})^{f(x)} = e$, jos $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ **tai** $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$. Toisaalta, raja-arvoa ei tarvitse olla olemassa (esim $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$). Kuitenkin, tarkastelemalla raja-arvoja kummaltakin puolen voi raja-arvo $\lim_{x\to a}(1 + \frac{1}{f(x)})^{f(x)}$ silti olla olemassa. Aina pitää kuitenkin tarkistaa toispuoleiset raja-arvot.

5. a) Olkoon $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$. Etsi funktion lokaaliset (paikalliset) ääriarvot. Tutki ääriarvojen laatu. Mikä on funktion suurin ja pienin arvo (kun $x \geq 0$)?

b) Laske käyrän $2x^3y + xy^3 = 12$ pisteeseen $(1, 2)$ piirretyn tangentin kulmakerroin.

Ratkaisu: a) Ks. demot VI/7.

b) Käytetään implisiittistä derivointia. Muistetaan, että y on x:n funktio ("kun x liikkuu, niin tekee myös y"). Muistetaan myös tulon derivaatan kaava $D(f \cdot g) = f' \cdot g + f \cdot g'$. Muistetaan myös yhdistetyn funktion derivaatan kaava $D(f \circ g) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$. (esim. $\frac{d}{dx}y^3 = 3y^2y'$.)

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(2x^3y + xy^3) = \frac{d}{dx}(12) &\iff \frac{d}{dx}(2x^3y) + \frac{d}{dx}(xy^3) = 0 \\
&\iff 2 \cdot 3x^2 \cdot y + 2x^3\frac{d}{dx}(y) + y^3 + x\frac{d}{dx}(y^3) = 0 \\
&\iff 6x^2y + 2x^3y' + y^3 + x \cdot 3y^2y' = 0 \\
&\iff y'(2x^3 + 3xy^2) + 6x^2y + y^3 = 0 \\
&\iff y' = -\frac{6x^2y + y^3}{2x^3 + 3xy^2}.
\end{aligned}
$$

Nyt kun sijoitetaan $x = 1$ ja $y = 2$ saadaan derivaatan arvo pisteessä $(1, 2)$:

$$
y'(1) = -\frac{6 \cdot 1^3 \cdot 2 + \cdot 2^3}{2 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1 \cdot 2^2} = -\frac{20}{14} = -\frac{10}{7}.
$$

$\square$