

Matematiikan peruskurssi 2

Tentti
18.12.2017

- Tentti kestää 3 tuntia.
- Sallitut apuvälineet: Matematiikan kaavakokoelma; laskin, joka ei kykene graafiseen/symboliseen laskentaan.
- Vastaa siististi, ja erota eri tehtävät selkeästi toisistaan.
- Tentti tarkastetaan mahdollisimman pian. Tulokset tulevat nettiopsoon kunhan opintosih-teeri ehtii ne sinne laittaa. Tuloksia voi tiedustella loppuviikosta. Jos haluat tulla katso-maan omaa koepaperiasi, niin tämä onnistuu vasta loppiaisen jälkeen. Seuraava tentti on 22.1.2018, ja siihen tulee ilmoittautua tammikuun alussa.

1. Määrittele täsmällisesti seuraavat käsitteet: funktio, injektio, surjektio. Anna esimerkki injektiivisistä funktioista (perustele lyhyesti miksi antamasi funktio on injektiivinen).

2. Ratkaise seuraavat yhtälöt/epäyhtälöt:

a) $\sin 3x = \frac{1}{2}$; b) $\left(\sin 3x - \frac{1}{2}\right)\left(\cos x - \frac{1}{2}\right) > 0$; c) $2^{x^2-1} = 3^{x-1}$.

3. Olkoon q positiivinen reaaliluku, $q \neq 1$. Osoita induktiolla, että

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

kaikilla luonnollisilla luvuilla $n \geq 0$. Korosta missä ja miten käytät induktio-oletusta.

4. a) Laske raja-arvot

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^3 - x^2 - 10x + 8}{(x-1)(x+3)} \quad \text{ja} \quad \lim_{x \rightarrow 1} e^{\sqrt{x^2+1}}.$$

Mäinitse mitä raja-arvojen laskusääntöjä sovellat.

b) Mitä Bolzanon lause sanoo? Tutki lauseen avulla lausekkeen $f(x) = x^3 - 2x + 1$ määrämien funktion nollakohtien lukumäärää välillä $[0, 1)$.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	1

Taulukko 1: Trigonometrinen funktioiden tarkkoja arvoja.