

Matematiikan peruskurssi A

Tentti

30.3.2015

Vastaa seuraavista viidestä tehtävästä *neljään*. Saat valita tehtävät vapaasti.

Tentti kestää 3 tuntia.

Ainoa sallittu taulukko on kurssilla jaettu yhden sivun kaavakokoelma.

- Esitä ja todista funktion $f(x)$ käänteisfunktion $f^{-1}(x)$ derivaattaa koskeva yleinen tulos. Riittää sama käsittely kuin monisteessa.
 - Vastaa seuraavista ainakin toiseen; toisesta saat lisäpisteitä.
 - Johda tulos $D(e^x) = e^x$ olettaen tunnetuksi, että $D(\ln x) = \frac{1}{x}$ ja että e^x on $\ln x$:n käänteisfunktio (kun otetaan sopivat määrittely- ja maalialueet).
 - Osoita, että $D(\sinh x) = \cosh x$ ja että $D(\tanh x) = 1 - \tanh^2 x$.
- Olkkoon $n \geq 1$. Arvaa summalle $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$ yleinen lauseke (esimerkiksi kokeilemalla pieniä n :n arvoja) ja todista se induktiolla oikeaksi.
- Ratkaise yhtälöt
 - $27^{x+1} = 9^x$,
 - $\log_7(2x + 5) - 2 \log_7 x = 1$,
 - $\sqrt{2} \sin 2x = 1$.
- Olkkoon $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$. Perustele seuraavissa kaikki hyvin.
 - Etsi $f(x)$:n lokaaliset ääriarvot (eli paikalliset ääriarvot).
 - Piirrä f :n kuvaaja. Selvitä sitä varten myös ainakin raja-arvot kun $x \rightarrow \pm\infty$. Mikä on kuvaajan tangentti kohdassa $x = 0$? Millä x :n arvoilla $f(x)$ on kasvava ja millä vähenevä? (Kuvaajan piirtämisessä ei riitä että laskee muutaman pisteen. Kaiken laskemasi pitää näkyä kuvassa.)Saat lisäpisteen, jos osaat tarkasti selvittää, millä x :n arvolla f :n kuvaaja laskee jyrkimmin.
- Seinäkellon heilurin heilahdusaika on $T = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{\ell}$ missä ℓ on heilurin pituus ja g on maan vetovoiman aiheuttama kiihtyvyyys (vakio $\simeq 9,8 \text{ m/s}^2$). Kuumana kesäpäivänä heilurin pituus kasvaa 0,04% lämpölaajenemisen vuoksi. Laske tästä aiheutuva T :n suhteellisen muutoksen likiarvo *differentiaalilin avulla*. (Siis kysytään likiarvoa suurelle $\Delta T/T$.)
 - Mikä on ympyrän $(x - 2)^2 + y^2 = 5$ pisteeseen $(3, 2)$ piirretyn tangentin yhtälö? Käytä implisiittistä derivointia.

Ratkaisut tulevat matematiikan laitoksen ilmoitustaululle (Publicum, 2. kerros).