

Matematiikan peruskurssi A

Tentti

11.6.2015

Vastaa seuraavista viidestä tehtävästä *neljään*. Saat valita tehtävät vapaasti.

Tentti kestää 3 tuntia.

Ainoa sallittu taulukko on kurssilla jaettu yhden sivun kaavakokoelma.

- Miten funktion $f(x)$ derivaatta $f'(x_0)$ pisteessä x_0 määritellään?
 - Kirjoita derivoinnin ketjusääntö eli yhdistetyn funktion $g \circ f$ derivointikaava.
 - Esitä ketjusäännön todistus. Riittää todistaa samalla lisäoletuksella kuin monisteesakin tehtiin.

- Olkoon q reaaliluku, $q \neq 1$. Todista induktiolla kaava

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad (n \geq 0).$$

Pitää todella käyttää induktiota, niin että induktioväitteen todistuksessa tulee induktiooletus tosiaan käyttöön. (Saman kaavanhan voi todistaa helposti suoraankin, mutta se ei nyt siis kelpaa.)

- Laske seuraavista raja-arvoista ainakin kaksi; kolmannelta saat lisäpisteitä.

a. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2 + x} - \frac{1}{x^3 + x} \right)$ b. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + 4}{x + 3} \right)^{2x+1}$ c. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sinh x}{\cosh x}$

- Määritellään käyrä parametrimuodossa $\begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2 \end{cases}$ ($t \in \mathbb{R}$). Laske käyrän pisteeseen $(x, y) = (8, 4)$ piirretyn tangentin kulmakerroin. Menetelmä on vapaa.

- Oletetaan, että funktio $y = y(x)$ toteuttaa identtisesti yhtälön $e^{xy} - y = 0$ (monisteessa tätä sanottiin *side-ehdoksi*). Johda tästä implisiittisellä derivoinnilla kaava

$$y' = \frac{ye^{xy}}{1 - xe^{xy}}.$$

Kuinka suuria siis ovat $y(0)$ ja $y'(0)$?

- Ratkaise yhtälöt

a. $\sin^2 x = \frac{1}{4}$,

b. $2 \cos^2 x + \sin x = 2$.