

# Matematiikan peruskurssi B

Tentti

5.3.2012

Vastaa seuraavista viidestä tehtävästä neljään. Saat valita tehtävät vapaasti.

Tentti kestää 3 tuntia.

Ainoa sallittu taulukko on kurssilla jaettu yhden sivun kaavakokoelma.

1. a. (i) Määrittele, mitä tarkoittaa, että  $F(x)$  on funktion  $f(x)$  integraalifunktio välillä  $I$ . (1 piste)
- (ii) Jos  $F(x)$  on eräs  $f(x)$ :n integraalifunktio välillä  $I$ , niin mitkä ovat tarkalleen kaikki  $f(x)$ :n integraalifunktiot? (1 piste)
- b. Todista kohdassa (ii) esittämäsi tosiasia, siis esitä se monisteen todistus. Muotoile hyvin. (6 pistettä)

2. Etsi funktion  $f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + \frac{3}{2}y^2 + 3xy$  lokaaliset minimi- ja maksimit.

3. a. Laske käyrän  $y = x^{3/2}$  kaaren  $0 \leq x \leq 4$  pituus.

b. Mikä on sen pyörähdysskappaleen tilavuus, joka syntyy, kun a-kohdan kaari pyörähtää  $x$ -akselin ympäri? Piirrä kuvio.

4. Suppeneeko vai hajaantuuko seuraava sarja? Jos suppenee, niin mikä on summa?

a.  $\frac{1}{3} + \frac{2}{4} + \frac{3}{5} + \frac{4}{6} + \frac{5}{7} + \dots$     b.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!2^n}$     c.  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 \cdot 3^n}{5^{n+1}}$     d.  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{7^n}{6^{n+1}}$

5. a. Suora  $y = x$  ja käyrä  $y = x^3$  erottavat tasosta kaksi aluetta  $A_1$  ja  $A_2$ . Olkoon  $A_1$  näistä se, joka sisältyy I neljännekseen. Piirrä kuvio. Laske integraali  $\int_{A_1} x^2 y \, dA$ .

Olkoon  $A$  alueet  $A_1$  ja  $A_2$  yhdessä (siis  $A = A_1 \cup A_2$ ). Näytä että  $\int_A x^2 y \, dA = 0$ .

b. Laske integraali

$$\int_0^1 \left( \int_y^1 \frac{ye^x}{x^2} \, dx \right) dy.$$

Ratkaisut tulevat 2. kerroksen ilmoitustaululle.