

Matematiikan peruskurssi B

Tentti

17.12.2012

Vastaa seuraavista viidestä tehtävästä *neljään*. Saat valita tehtävät vapaasti.

Tentti kestää 3 tuntia.

Ainoa sallittu taulukko on kurssilla jaettu yhden sivun kaavakokoelma.

1. a. Kirjoita I kertaluvun lineaarisen differentiaaliyhtälön $y' + f(x)y = g(x)$ yleinen ratkaisukaava ja ratkaise sen avulla yhtälö $xy' + x^2(y + 1) = 0$.
- b. Todista a-kohdassa kysytty yleinen ratkaisukaava. Siis esitä se monisteen todistus.

2. Laske integraalit

a. $\int \frac{\ln^5 x}{x} dx$, b. $\int x \sin x dx$, c. $\int (1+x)\sqrt{1-x} dx$.

3. Laske pintaintegraali $\int_A x^2 y dA$, kun A on käyrien $y = x^2$ ja $y = \sqrt{x}$ rajoittama alue. Piirrä kuvio alueesta A .

Saat pari lisäpistettä, jos lasket saman pintaintegraalin integroimalla x :n ja y :n suhteen toisessakin järjestyksessä ja saat saman tuloksen.

4. Laske raja-arvot

a. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x}$, b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan x}{x^3}$.

Menetelmä on vapaa.

5. a. Osoita, että $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$ hajaantuu mutta integraali $\int_1^\infty \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) dx$ suppenee. Mikä jälkimmäisen integraalin arvo on? Näytä kuvioilla, mitä pinta-aloja nämä integraalit tarkoittavat.
- b. Laske sen kappaleen tilavuus, joka syntyy kun käyrän $y = \frac{1}{x}$ kaari $1 \leq x \leq b$ pyörähtää x -akselin ympäri ($b > 1$). Mikä tilavuuden raja-arvo on kun $b \rightarrow \infty$?
- Entä mitä saadaan jos pyörähtävä kaari onkin $a \leq x \leq 1$, missä $0 < a < 1$, ja otetaan raja-arvo $a \rightarrow 0+$?

Ratkaisut tulevat matematiikan laitoksen ilmoitustaululle (Publicum, 2. kerros).