

Algebran peruskurssi I

Tentti, 12.3.2012

Tentti kestää noin 3 tuntia.

- a) Laske $\text{sy}(513, 4199)$ Eukleideen algoritmin avulla ja esitä se muodossa $513x + 4199y$, missä $x, y \in \mathbb{Z}$.
b) Mikä on jakojäännös, kun $3^{20000} + 134^5$ jaetaan luvulla 11?
- Tarkastellaan ryhmää \mathbb{Z}_{18}^* .
a) Luettele ryhmän alkioit. Näytä, että ryhmä \mathbb{Z}_{18}^* on syklinen.
b) Anna aliryhmän $H = \langle \overline{17} \rangle$ vasemmat sivuluokat ryhmässä \mathbb{Z}_{18}^* . Muodosta tekijäryhmän \mathbb{Z}_{18}^*/H ryhmätaulu.
sivuluokkien joukko
- a) Ovatko funktiot $\sin x$, $\cos x$ ja x^3 lineaarisesti riippumattomia funktioavaruudessa $F(\mathbb{R})$?
b) Tarkastellaan polynomiavaruuden P_3 aliavaruutta

$$U = \{p \in P_3 \mid \int_{-1}^1 p(x) dx = 0\}.$$

Anna aliavaruudelle U kanta (perustelee tarkasti). Täydennä lisäksi kantasi polynomiavaruuden P_3 kannaksi.

- a) Olkoon $f : G \rightarrow G'$ ryhmähomomorfismi. Mitä tarkoitetaan sen ytimellä $\text{Ker}(f)$? Todista, että aliryhmä $\text{Ker}(f)$ on normaali. (Mikäli vetoat yleisempään tulokseen $N' \trianglelefteq G' \Rightarrow f^{-1}(N') \trianglelefteq G$, niin todista se.)
b) Olkoot H ja N ryhmän G normaaleja aliryhmiä ja $N \subseteq H$. Todista, että $f : G/N \rightarrow G/H$, $f(xN) = xH$ on hyvinmääriteltä homomorfismi. Esitä sen ydin sopivana tekijäryhmänä.
c) Etsi sellainen ryhmä, jonka kertaluku on 9 ja joka ei ole syklinen. Osoita lisäksi, että kaikki löytämäsi ryhmän aliryhmät ovat syklisiä.

$a \in ?$
 $n \in \text{Ker}(f) \quad anu^{-1} \in N$

$$f(ana^{-1}) = f(a) \underbrace{f(n)}_{=1} f(a)^{-1} = 1$$