

Algebran peruskurssi II

Tentti

9.5.2012

Vastaa seuraavista viidestä tehtävästä neljään. Saat valita tehtävät vapaasti.

Tentti kestää 3 tuntia.

1. (a) Monisteen eräässä lemmassa todistetaan, että jos G on syklinen ryhmä ja $H \leq G$, $H \neq \{1\}$, niin myös H on syklinen. Mikä alkio kelpaa H :n generoijaksi? Anna ryhmän $C_\infty = \langle c \rangle$ aliryhmän $\langle c^6, c^{10} \rangle$ generoija. Perustele. (3 pistettä)

- b. Todista a-kohdassa mainittu lemma. Muotoile sekä lemma että todistus kunnolla — monisteen mallin mukaan. (5 pistettä)

- (2) a. Tarkastellaan S_4 :n alkioita $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. Kirjoita α :n sykliesitys. Kirjoita α :n konjugaattiluokka $[\alpha]$. Saat käyttää sen alkioille sykliesityksiä tai esityksiä muodossa $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ * & * & * & * \end{pmatrix}$. 1 ?

- b. Muistetaan, että ryhmän G keskus $Z(G)$ on niiden G :n alkioiden joukko jotka kommutoivat G :n kaikkien alkioiden kanssa. Todista, että kun $\beta \in S_4$, niin $\beta \in Z(S_4) \Leftrightarrow [\beta] = \{\beta\}$. Päättele (tästä tai muuten) että $Z(S_4) = \{1\}$. $J = \beta^{15}$

3. Olkoon D kokonaisalue.

- (a) Määritellään D :ssä jaollisuusrelaatio: kun $a, b \in D$, niin $a \mid b$ jos ja vain jos $b = ac$, $c \in D$. Todista, että jos $a \mid b$ ja $b \mid a$, niin $a = ub$ missä $u \in D^*$. Perustele päättelysi vaiheet. $\beta = \tau \gamma \tau^{-1}$

- b. Onko seuraava ekvivalenssi yleisesti tosi, kun $a, b \in D$? \mathbb{Z}_p

$$\langle a \rangle = \langle b \rangle \iff a = ub, \quad u \in D^* = \{1, -1\} \quad (1)$$

4. Olkoon $n \neq 0, 1$ neliövapaa kokonaisluku. Mitkä ovat renkaan $\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$ endomorfismit? Perustele kaikki tarkasti. $x = \bar{2}, \quad 8 - 4 + 1 = 5 = \bar{2}$

5. Olkoon $L = \mathbb{Z}_3[x]/\langle x^3 - x^2 + 1 \rangle$. $\left. \begin{array}{l} \text{käännt. alk} \\ \text{käynn} \\ \text{ei nollassa} \\ \text{2 alkioon} \end{array} \right\}$

- a. Osoita, että rengas L on kunta. Millaisia sen alkiot ovat? Perustele. Montako niitä on? Mikä äärellinen kunta $GF(p^k)$ siis on kyseessä? $x^3 = x^3 - x^2 + 1 + x^2 - 1 = x^2 - 1 + \langle f \rangle$

- b. Etsi kunnassa L alkion $x + \langle x^3 - x^2 + 1 \rangle$ käänteisalkio.

Ratkaisut tulevat 2. kerroksen ilmoitustaululle.