Differentiaaliyhtälöt

Tentti 15.5.2012, 3 tuntia

1. Tasa-asteinen yhtälö on muotoa
$$y' = f(\frac{y}{x})$$
missä $y = y(x)$ ja f on jatkuvasti differentioituva funktio. Osoita, että muunnoksella $v(x) = \frac{y(x)}{x}$, jossa $x \neq 0$, saadaan separoituva differentiaaliyhtälö. Ratkaise sovellutuksena alkuarvotehtävä:
$$y' = \frac{x^2 - y^2}{xy}\ , \quad y(1) = 1.$$

2. Yhtälön
$$x'(t) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x(t) \tag{1}$$
kompleksinen ratkaisu on
$$x(t) = e^{(-1+i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = e^{-t} (\cos t + i \sin t) \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \tag{2}$$
a) Osoita, että kompleksisen ratkaisun (2) reaali- ja imaginaariosat totetuttavat yhtälön (1) ja muodostavat perusjärjestelmän.

b) Ratkaise yhtälö
$$x'(t) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 2\alpha \\ 2\beta \end{pmatrix}$$
jossa $\alpha \in \mathbb{R}$ ja $\beta \in \mathbb{R}$.

3. a) Tutki, milloin funktio $y_1(x) = ax + b$, $a \in \mathbb{R}$ ja $b \in \mathbb{R}$, toteuttaa yhtälön
$$x^2y'' + 2xy' - 2y = 0\ , \quad x > 0.$$
Etsi yhtälön toinen perusratkaisu yritteellä $y_2(x) = f(x)y_1(x)$.

b) Ratkaise vakioiden varioinnilla
$$y'' + \frac{2}{x}y' - \frac{2}{x^2}y = \frac{2x-1}{x^2}\ , \quad x > 0,$$
kun tunnetaan homogeenisen yhtälön perusjärjestelmä a)-kohdasta.

4. Ratkaise seuraavat tehtävät ja tutki mitä tapahtuu ratkaisuille kun $t \to \infty$.

a) $y''(t) + 9y(t) = 2\cos t,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0,$

b) $x'(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x(t),\ x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Tentissä sallitut apuvälineet: laskin (ei graafinen tai symboliseen laskentaan kykenevä), ja "Matematiikan kaavoja"-arkki.