Geometria

Tentti 16.12.2019

Tenttiaika on 3 tuntia. Jokaisesta tehtävästä saa enintään 6 pistettä. Vastaa kaikkiin tehtäviin ja perustele ratkaisut tarkasti. Laskin ja laitoksen kaavakokoelma ovat sallittuja (tosin niistä ei liene apua).

1. (a) 3 pistettä: Olkoon $\triangle ABC$ kolmio ja $M_A \in BC$, $M_B \in AC$ sen mediaanien kantapisteet. Osoita, että $AB \parallel M_A M_B$.

   (b) 3 pistettä: Olkoon $\diamond ABCD$ konsyklinen nelikulmio, jossa $AB \parallel CD$. Osoita, että $AC = BD$.

2. (a) 3 pistettä: Esitä Menelauksen ja Cevan lauseet (ilman todistuksia).

   (b) 3 pistettä: Olkoon $\triangle ABC$ kolmio, olkoon $M_C \in AB$ sen mediaanin kantapiste ja $P \in BC$ jokin sivun piste. Oletetaan, että suorat $\ell(M_C, P)$ ja $\ell(A, C)$ leikkaavat pisteessä Q, jolle pätee $\overline{AC} = 2 \cdot \overline{CQ}$. Määritä BP/PC.

3. Olkoot P ja Q kaksi eri pistettä, ja olkoot $\sigma_1 = \sigma_{(P,90^\circ)}$ ja $\sigma_2 = \sigma_{(Q,-90^\circ)}$ kiertoja niiden ympäri 90 asteen verran, toinen myötä- ja toinen vastapäivään. Mikä isometria tarkalleen ottaen on niiden yhdiste $\sigma_2\sigma_1$? Etsi sille kiintopiste tai osoita, että sellaista ei ole.

4. Olkoon $\triangle ABC$ kolmio, jossa $\angle C = 90^\circ$, $AC = 1$ ja $BC = 2$. Valitaan sen sivun piste $P \in AB$. Olkoon $Q \in BC$ sellainen piste, että reitin PQA pituus on mahdollisimman pieni. Osoita, että

$$CQ = \frac{2 \cdot AP}{2\sqrt{5} - AP}.$$