

Insinöörimatematiikka A

Tentti 5.12.2016

noin 3 tuntia

Tentissä saa olla mukana matematiikan kaava-arkki, mutta ei laskinta.

Vastaa tehtävissä (a) ja (b)-kohtaan.

1. (a) Olkoot p , q ja r propositiomuuttujia ja olkoot ϕ ja ψ propositiot $\phi = (\neg p \rightarrow q) \wedge r$ ja $\psi = (p \vee q) \leftrightarrow r$. Onko ψ kaavan ϕ looginen seuraus? Entä ϕ kaavan ψ looginen seuraus? (Onko siis $\phi \Rightarrow \psi$ ja onko $\psi \Rightarrow \phi$?) Perustele hyvin!

- (b) Pitääkö paikkansa kaikilla joukoilla A , B ja C , että

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)?$$

Piirrä Vennin kaaviot. Todista oikeaksi tai esitä mahdollisimman konkreettinen vastaesimerkki.

2. (a) Joukon $A = \{a, b, c, d, e\}$ relaatiossa R on parit

$$(a, a), (a, c), (b, d) \text{ ja } (e, a).$$

Mikä on vähin määrä pareja, jotka relaatioon R täytyy lisätä, jotta R :stä tulee ekvivalenssirelaatio? Mitkä parit ne ovat? Miksi?

- (b) Todista matemaattisella induktiolla, että

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Kirjoita täydellisesti näkyviin induktion lähtökohta (IL), induktio-oletus (IO), induktioväite (IV) ja itse induktiotodistus (IT).

3. (a) Esitä kompleksiluku $z = \sqrt{3} - i$ kompleksitasossa ja etsi sen polaariesitys. Mitkä ovat kompleksisen logaritmin $\text{Log } z$ kaikki arvot?

- (b) Jaa (reaalisiin) osamurtoihin

$$\frac{1}{x^3 + x}$$

4. Etsi matriisin

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

redusoitu porrasmuoto käyttäen matriisien alkeisoperaatioita ja ratkaise sen avulla yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x & - & z & - & w & = & 2 \\ -x & + & y & - & z & + & w & = & 2 \\ -x & - & y & + & 2z & + & 2w & = & -5 \end{cases}$$

Ilmoita ratkaisut sellaisten vakiovektorien summana, jotka on mahdollisesti kerrottu muuttujilla.