

Insinöörimatematiikka B

Tentti 9.1.2017

noin 3 tuntia

Tentissä saa olla mukana matematiikan kaava-arkki ja ei-graafinen, ei-symbolinen laskin.

Vastaa tehtävissä kaikkiin kohtiin.

1. Olkoon a vakio. Funktio $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on määritelty seuraavasti:

$$f(x) = \begin{cases} a, & \text{kun } x = 0, \\ x^2 \sin \frac{1}{x} + 2, & \text{kun } x \neq 0. \end{cases}$$

- (a) Perustele hyvin, miksi

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2.$$

- (b) Miten a on valittava, että f jatkuva origossa? Miksi?

- (c) Derivoi $f(x)$, kun $x \neq 0$.

- (d) Laske derivaatan määritelmästä lähtien $f'(0)$, kun a on valittu b-kohdan mukaan.

2. (a) Totea, että kuvaus $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on aidosti kasvava ja laske sen käänteisfunktion f^{-1} derivaatta $(Df^{-1})(3)$ pisteessä $y = 3$, kun $f(x) = x^3 - x^2 + x + 2$.

- (b) Funktio $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $y = f(x)$, on annettu parametrimuodossa

$$\begin{cases} x(t) = \cos^3 t, \\ y(t) = \sin^3 t. \end{cases}$$

Mikä on parametrin t arvo, kun $x = \frac{1}{8}$? Mitä on $f'(x)$ pisteessä $x = \frac{1}{8}$?

3. Laske raja-arvot

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x - x)^2}{x^4(1 - \cos x)} \quad \text{ja} \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x \sqrt{1 + 3e^t} dt.$$

4. (a) Laske

$$\int_1^2 x \ln x dx.$$

- (b) Missä kohdassa integraali

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2 - 2x}$$

on epäoleellinen? Suppeneeko se? Jos suppenee, laske sen arvo.