

Kombinatoriikka 2.8. 2004

3 h

1. Ratkaise rekursio, missä $u_n = 3u_{n-2} - 2u_{n-3}$ kaikilla $n \geq 3$, kun $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ ja $u_2 = -1$.

2. Tarkastellaan joukon $\{1, 2, \dots, 20\}$ permutaatioita. Kuinka monta sellaista permutaatiota on, että 1 on ensimmäisenä tai 20 viimeisenä?

3. Kuinka monta kokonaislukuratkaisua on yhtälöllä

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4,$$

kun $-2 \leq x_i \leq 2$ kaikilla $1 \leq i \leq 4$.

4. Fibonaccin jono määritellään rekursiolla $F_0 = 1$, $F_1 = 1$ ja $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, kun $n \geq 0$. Osoita, että

$$\frac{1}{1-x-x^2}$$

on jonon $(F_n)_{n=0}^{\infty}$ generoiva funktio.

5. Osoita, että

$$\sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{n}{i} = (-1)^m \binom{n-1}{m}.$$

