

Kombinatoriikka, tentti (7.3.2005)
(n. 3 tuntia)

- 1 Tarkastellaan Lotto-pelin variaatiota, jossa arvotaan kolme varsinaista ja kaksi lisänumeroa joukosta $\{1, 2, \dots, 20\}$. Veikkaajien rivit koostuvat kolmesta numerosta.
- a) Montako erilaista riviä veikkaaja voi muodostaa? Entä montako erilaista arvontaa (varsinaiset + lisänumerot) on olemassa?
- b) Montako sellaista riviä, jossa on ainakin yksi varsinainen numero oikein, on olemassa?
- 2 Hyllylle on sijoitettava kuusi kirjaa rinnatusten. Kirjoista kahdessa on punaiset kannet. Monellako tavalla kirjat voidaan asettaa, kun punakantisia ei saa asettaa vierekkäin? (Kaikki kirjat ovat keskenään erilaisia.)
- 3 Montako kokonaislukuratkaisua on yhtälöllä $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$, kun
- a) kaikki x_i 't ovat ei-negatiivisia;
- b) kaikki x_i 't ovat positiivisia ja parittomia?
- 4 Ratkaise seuraavat rekursioyhtälöt.
- a) $a_n - a_{n-1} - 6a_{n-2} = 0$; $a_0 = 2$, $a_1 = 1$;
- b) $b_n = 5b_{n-1} - 6b_{n-2} + 2^n$; $b_0 = 1$, $b_1 = 0$.
- 5 Fibonaccin luvut F_n määritellään ehdoista $F_0 = F_1 = 1$ ja $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ ($n \geq 0$). Osoita generoivien funktioiden avulla, että

$$F_0 + F_1 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1.$$