

## Kombinatoriikka 8.11. 2004

3 h

1. Osoita, että

$$\binom{m}{0} \binom{n}{0} + \binom{m}{1} \binom{n}{1} + \cdots + \binom{m}{n} \binom{n}{n} = \binom{m+n}{n}.$$

2. Kuinka monta ratkaisua on kokonaislukuyhtälöllä

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7,$$

missä  $0 \leq x_1 \leq 7$ ,  $1 \leq x_i \leq 7$ , kun  $i = 2, 3, 4$ , ja  $0 \leq x_5 \leq 7$ .

3. Kirjahyllyssä on 11 kirjaa. Kuinka monella tavalla voidaan valita 4 kirjaa siten, että kahta vierekkäistä kirjaa ei saa valita?

4. Jalkapalloturnauksessa jokainen joukkue pelaa 15 peliä 10 päivässä, joka päivä vähintään yhden pelin. Osoita, että laaditaanpa otteluohjelma miten tahansa, joukkue pelaa välttämättä tarkalleen 4 ottelua jossakin peräkkäisten päivien jaksossa. (Huomaa, että peräkkäisten päivien jakso voi olla 1-4 päivää.)

5. Määrittele ns. derangement-ongelma. Osoita, että derangement-permutaatioiden lukumäärä

$$D_n = n! \left( \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!} \right).$$

