Lineaarialgebra (mat), 2. välikoe, 14.12.2011

Välikokeen pituus n. 3 tuntia

~~1~~. Laske alkeismuunnoksia käyttämällä matriisin

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

käänteismatriisi.

$f(\bar{x}+\bar{y}) = \bar{0}$

$f(\bar{x}) + f(\bar{y}) = \bar{0}$

$f(\bar{x}) = -f(\bar{y})$

~~2~~. a) Määritellään lineaarikuvaukset $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ja $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ehdoilla

$(f \circ g)\bar{x} = M(f \circ g)\bar{x}$

$$f(x,y) = (2x+3y, -x+5y), \quad g(x,y) = (-3x+y, 5x-2y).$$

$M(f \circ g)$

$f(g(\bar{x}))$

$M(f) \cdot M(g)\bar{x}$

Muodosta kuvausten f, g ja $f \circ g$ matriisit luonnollisen kannan suhteen.

b) Olkoon $U = L((2,-1,3,1),(1,0,-1,2))$. Etsi jokin sellainen $\mathbb{R}^4$:n aliavaruus V, että

$$\mathbb{R}^4 = U \oplus V.$$

täydennä $\mathbb{R}^4$:n kannaksi

3. Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -9 \\ 9 & -10 & -27 \\ -3 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 3)$

$(3,1,1)$ ei kuulu $\mathrm{Ker}(f)$

Etsi A:n ominaisarvot. Voidaanko A diagonalisoida?

4. a) Todista seuraava monisteen lause: Kun $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ on lineaarikuvaus, niin

$$\dim \mathbb{R}^n = \dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Im}(f).$$

$\mathrm{Im}(f) = R(A)$

$\bar{x} \in \mathrm{Ker}\, f$ jos $f(\bar{x}) = \bar{0}$

b) Olkoon $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ lineaarikuvaus. Oletetaan, että vektorit $(1,1,0)$ ja $(-1,1,0)$ virittävät avaruuden $\mathrm{Ker}(f)$ ja vektori $(2,1,-2)$ virittää avaruuden $\mathrm{Im}(f)$. Lisäksi tiedetään, että vektorin $f(3,1,1)$ pituus on 3 ja ensimmäinen koordinaatti positiivinen. Laske kuvauksen f matriisi luonnollisen kannan suhteen.

$-3-3t = -3(1+t)$

$= 3(-1-t)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -28 & 9 & -11 \\ 13 & -4 & 5 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$x = y + 3z$

$= t_2 + 3t_1$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$