

# Lukuteoria

Tentti 23.10.2019

Kesto: 4 h

Sallitut apuvälineet: Matematiikan kaavakokoelma, laskin (EI graafinen/symbolinen)

1. Etsi jokin muotoa  $273x + 385y$  (missä  $x, y \in \mathbb{Z}$ ) oleva esitys lukujen 273 ja 385 suurimmalle yhteiselle tekijälle (273, 385).

2. Määritä

(a)  $\varphi(27)$ ,

(b)  $5^{20} \pmod{27}$  (siis edustaja  $r \equiv 5^{20} \pmod{27}$  väliltä  $0 \leq r < 27$ ).

3. Olkoon  $E$  ehdon  $E(m) = 1$  ( $\forall m \in \mathbb{N}$ ) määräämä funktio.

(a) Osoita, että jokainen funktio  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  toteuttaa ehdon

$$(f * E)(n) = \sum_{d|n} f(d).$$

(b) Olkoon  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  funktio  $g(n) = n^2$  ( $\forall n \in \mathbb{N}$ ).

Laske  $(g * E)(p^k)$ , kun  $p \in \mathbb{P}, k \in \mathbb{N}$ .

4. Ratkaise kongruenssit

(a)  $x^2 + 2x \equiv 0 \pmod{11}$ ,

(b)  $x^2 + 2x + 1 \equiv 0 \pmod{11}$ .

5. Ratkaise kongruenssit

(a)  $x^2 + 2x + 2 \equiv 0 \pmod{13}$ ,

(b)  $2x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{13}$ .

Kaavoja: (i)  $(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right)$ , (ii)  $\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$ , (iii)  $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$ ,

(iv)  $\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}}$  ( $p, q \in \mathbb{P}; p \neq q; p, q \neq 2$ ), (v)  $D = b^2 - 4ac$