Analyysi I (mat.ko.). Välikoe II. 12.12.2011

(Koeaika n.3t.)

1) a) Miten kuuluu funktion raja-arvon $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$ täsmällinen määritelmä?

b) Määritä $\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x}$ eri n:n arvoilla $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ käyttämällä l'Hospitalin sääntöä silloin kun se on luvallista ja perustelemalla muut tapaukset jollain muulla tavalla (a)-kohdan täsmällistä määritelmää ei tarvitse käyttää).

2) Hiukkanen liikkuu pitkin käyrää, jonka yhtälö on $\frac{xy^3}{1+y^2} = \frac{8}{5}$. Mittaustuloksista nähdään, että x-koordinaatti kasvaa nopeudella 6 cm/s, sillä hetkellä kun hiukkanen on pisteessä (1, 2). Millä nopeudella hiukkasen y-koordinaatti muuttuu tällä hetkellä?

3) a) Olkoon funktio f jatkuva suljetulla välillä $[a,b]$ ja $f'(x) \geq k$ (=vakio) välillä (a,b). Osoita, että $f(b) \geq f(a) + k(b-a)$. $\rightarrow$ $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \geq k$

a) Miten kuuluu differentiaalilaskennan väliarvolause? Todista ketjusääntö $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$ oikeaksi soveltamalla väliarvolausetta sopivasti kahteen kertaan $g \circ f$:n derivaatan määritelmään.

4) Käyrän $y = f(x)$ pisteeseen $P(x,y)$ liittyväksi kaarevuusympyräksi sanotaan ympyrää, joka liittyy käyrään mahdollisimman läheisesti. Läheisyyden mittana käytetään ympyrän ja käyrän pisteessä $P(x,y)$ laskettujen derivaattojen yhtymistä mahdollisimman korkeaan kertalukuun asti ts y, y', y'',... yhtyvät. Voidaan osoittaa, että niihin pisteisiin, joissa $f''(x) \neq 0$ liittyy yksikäsitteinen kaarevuusympyrä ja että sen säde on

$$r = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}.$$

Etsi missä pisteessä tai pisteissä logaritmikäyrä $y = \ln x$ kaareutuu voimakkaimmin, eli säde r on mahdollisimman pieni. Käytä logaritmista derivointia.

etsi $r' = 0$

milloin