$Df^n = n f^{n-1} \cdot f'$

$Df^{n+1} = (n+1) f^n f' \Rightarrow 2ff' = Df^2$

$\frac{\ln(n+1)}{n+1} \cdot \frac{n}{\ln n} = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{\ln(n+1)}{\ln n}$

$\frac{\ln x}{x} = \frac{1}{x} \cdot \ln x = f' f \qquad ff' = \frac{1}{2} Df^2$

$= \frac{1}{2}(\ln x)^2 \qquad \int ff' = \frac{1}{2} f^2$

$\frac{1}{2}\left((\ln c)^2 - \ln 1\right)$

Analyysi II (matem.)

Välikoe 2, 07.05.2012

Vastaa NELJÄÄN tehtävään. Jos vastaat viiteen tehtävään, niin neljä PARASTA vastausta otetaan huomioon. Jos tehtävässä on useita kohtia (A, B, ...) on vastattava KAIKKIIN. Tehtävät eivät välttämättä ole vaikeusjärjestyksessä. Don't panic!

1. Selvitä perustellen suppenevatko vai hajaantuvatko seuraavat sarjat? Onko mahdollinen suppeneminen itseistä?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^{9/8}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$$

vähenevä, $\lim = 0$? $\Rightarrow$ Leibniz ? int.testi arctan x $\pi/2$

2. A) Ovatko seuraavat väitteet tosia vai epätosia? Jos väite on tosi, perustele se lyhyesti. Jos väite on epätosi, kumoa se esittämällä vastaesimerkki.

   A1) Jos $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$, niin sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hajaantuu. tosi

   A2) Jos $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$, niin sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ suppenee aina, kun $|x| < 1$. ~~epätosi~~ $\lim = 1$ mutta vastaesim ? sarja hajaantuu, esim ?

   B) Niin sanotussa Padé-approksimaatiossa potenssisarjan summaa arvioidaan kahden polynomin osamäärän avulla. Eksponettifunktion sarjan eräs Padé-approksimaatio on

$$e^x \approx \frac{(x+3)^2+3}{(x-3)^2+3}.$$

$(1-x^2)^{-1\,\prime} = -1(1-x^2)^{-2} \cdot (-2x)$ esim $a_n = \frac{n+1}{n}$ $\quad \frac{n+2}{n+1} \frac{x^{n+1}}{x^n} \frac{n}{n+1} = \frac{x^n n(n+2)}{(n+1)^2} = \frac{n^2 x^n (1+\frac{2}{n})}{n^2 (1+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{n}) x^n}$

   Tarkista kertomalla e^x:n potenssisarja nimittäjällä $(x-3)^2+3$, että tuloksesi saatava potenssisarja yhtyy osoittajan $(x+3)^2+3$ 'potenssisarjaan' termien $x^n, n \le 4$, osalta. Minkä likiarvon tämä Padé-approksimaatio antaa luvuille e, $\sqrt{e}$ ja $1/\sqrt{e}$?

3. Esitä funktio $f(x) = 1/(1-x^2)$ origokeskisenä potenssisarjana. Millä muuttujan x arvoilla sarjasi suppenee ja esittää funktiota $f(x)$? Geometrisen sarjan ominaisuuksia voit pitää tunnettuina. Integroi sarjasi termeittäin yli välin $[0, 1/2]$. Etsi tuloksesi avulla luvulle $\ln 3$ sellainen likiarvo, jossa 3 ensimmäistä desimaalia ovat oikein.

$-yx \cdot (x+y)^{-1}$

$= -y(x+y)^{-1} + (-yx)(-1)(x+y)^{-2}$

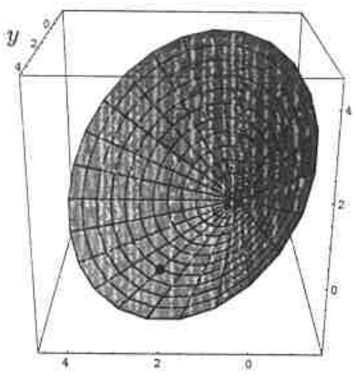
$= -\frac{y}{x+y} + \frac{xy}{(x+y)^2}$

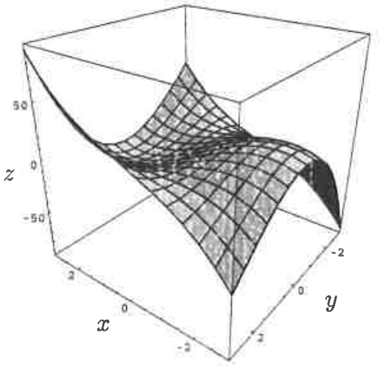
4. Yhtälö $xy+yz+zx = 0$ määrää erään kallellaan olevan kartion. Tarkista, että kaikki koordinaattiakselit sekä piste $P = (2, 2, -1)$ ovat tällä kartiopinnalla. Määrää kartion pisteeseen P piirretyn tangenttitason yhtälö. Alla vasemmalla näkymä kartion 'sisään'. Koordinaattiakseleita ei ole piirretty kuvaan mukaan.

ratk z

$z(y+x) = -xy$

$z = -\frac{xy}{x+y} = f(x,y)$





osittaisder. ok ?

$3x + 3y^2 = 3(x+y^2)$

$3y(2x+y)$

5. Etsi funktion $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 + y^3 - 15x$ (kuvaaja yllä oikealla) kriittiset pisteet ja selvitä niiden luonne (lokaali min./max. tai satulapiste). Opastus/Tarkistus: Kriittisiä pisteitä on 4 kappaletta ja ne kaikki 'mahtuisivat' kuvaan, vaikkei niitä sinne ole piirretty. Osittaisderivaatan f_y voi jakaa tekijöihin tehtävän ratkaisua helpottavalla tavalla.

$y^2 + x = (y + \sqrt{-x})(y - \sqrt{-x})$

$= y^2 - (\sqrt{-x})^2 =$

$D = \begin{vmatrix} f_x & f_{yx} \\ f_{xy} & f_y \end{vmatrix}$

$2^3 = 8$

$2^5 = 32$

$2^7 = 128$