

Analyyysi II (matem.)

Välikoe 1, 09.03.2012

Vastaa NELJÄÄN tehtävään. Jos vastaat viiteen tehtävään, niin neljä PARASTA vastausta otetaan huomioon. Jos tehtävässä on useita kohtia (A, B, ...) on vastattava KAIKKIIN. Tehtävät eivät välttämättä ole vaikeusjärjestyksessä. Don't panic!

1. Etsi määräämättömät integraalit

$$\int (\pi - x) \sin x \, dx \quad \text{ja} \quad \int x(x^2 + 1)^4 \, dx.$$

- 2.

- A) Laske määrätty integraali sijoituksella $t = \sqrt{x}$

$$\int_1^4 \frac{1}{x + \sqrt{x}} \, dx.$$

- B) Laske määrätty integraali

$$\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{4x - x^2}} \, dx.$$

- C) Oletetaan, että funktio f on parillinen ja jatkuva välillä $[-1, 1]$. Osoita, että tällöin

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{1 + e^x} \, dx = \int_0^1 f(x) \, dx.$$

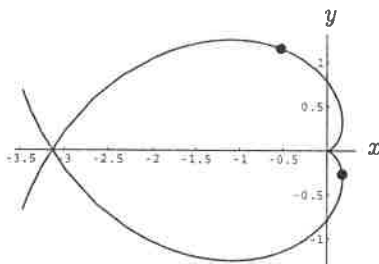
Opastus: Funktion $g(x) = 1/(1 + e^x)$ parillinen osa on ehkä jopa yllättävän yksinkertainen.

3. Tutkitaan hyperbelin

$$x^2 - y^2 = 1$$

alueessa $1 \leq x \leq 2, y \geq 0$ olevaa osaa. Määrää niiden kahden pyöräyskappaleen tilavuudet, jotka syntyvät hyperbelin tämän osan pyörähtäessä A) x -akselin, B) y -akselin ympäri.

4. Tutkitaan napakoordinaattiyhtälön $r = \varphi^2/\pi$ antamaa käyrää (kuva ohessa). Totea, että käyrä leikkaa itsensä suuntakulman arvoja $\varphi = \pi$ ja $\varphi = -\pi$ vastaavassa pisteessä. Laske käyrän välillä $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ rajaaman pitkulaisen sydämen muotoisen alueen pinta-ala. Kuvaan on merkitty myös suuntakulman



arvoja $\varphi = -1$ ja $\varphi = 2$ vastaavat pisteet. Laske käyrän näitä pisteitä yhdistävän osan pituus.

- 5.

- A) Laske epäoleellinen integraali

$$\int_2^\infty \frac{x+2}{x(x^2-1)} \, dx.$$

- B) Selitä, mitä epäoleellisten integraalien yhteydessä tarkoitetaan *majoranttiperiaatteella*. Perustele sitten, miksi epäoleellinen integraali

$$\int_e^\infty \frac{\ln x}{x^3} \, dx$$

suppenee.