Todennäköisyyslaskenta II, tentti 17.12.2012 (3 tuntia)

Ratkaise alla olevista tehtävistä neljä tehtävää.
Arvioinnissa huomioidaan neljä parasta, mikäli ratkaiset useamman.
Käytä ratkaisuissa mahdollisimman selkeitä merkintätapoja.
Ilmoita s-postiosoitteesi mikäli haluat tietää tuloksesi jo tänään.

1. Olkoon A käyrien $y = x$ ja $y = x^2$ väliin jäävä rajoitettu alue. Satunnainen piste (X, Y) valitaan alueelta A. Laske satunnaisvektorin (X, Y) yhteistiheysfunktio ja reunatiheysfunktiot. Laske $P(X \leq \frac{1}{2} \cap Y \leq \frac{1}{4})$.

2. Satunnaismuuttujien X ja Y yhteistiheysfunktio on ce^{-x}, kun $x \geq 0$ ja $|y| \leq x$, ja nolla muualla. Laske vakion c arvo. Laske Y:n ehdollinen tiheysfunktio ehdolla $X = x$. Laske myös Y:n odotusarvo ja varianssi.

3. Oletetaan, että satunnaismuuttujat $X \sim U(-1, 1)$ ja $Y \sim U(-1, 1)$ ovat riippumattomat. Laske tulon XY jakaumafunktio ja tiheysfunktio.

4. Noppaa heitetään n kertaa. Johda suurimman silmäluvun jakaumafunktio ja laske suurimman silmäluvun odotusarvo. Johda myös pienimmän silmäluvun jakaumafunktio.

5. a) Määrittele satunnaisen pituinen summa ja johda sen todennäköisyydet generoiva funktio, kun summattavilla on diskreetti jakauma.

   b) Oletetaan, että satunnaismuuttujat X_i, $i = 1, \ldots, n$, ovat riippumattomat ja että: $P(X_i = -1) = P(X_i = 1) = \frac{1}{2}$. Määritellään $Y_i = \frac{1}{2}(1 + X_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Oletetaan, että $N \sim \text{Po}(\lambda)$ on riippumaton X_i:stä ja tarkastellaan:

   $$S_N = \sum_{i=1}^{N} Y_i$$

   Laske $E(S_N)$ ja $\text{Var}(S_N)$.

6. a) Mikä on Markovin epäyhtälö?
   b) Oletetaan, että satunnaismuuttujat X_i, $i = 1, \ldots, n$, ovat riippumattomat ja että: $P(X_i = -1) = P(X_i = 1) = \frac{1}{2}$. Osoita, että

   $$P(|\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i}_{\bar{X}_i}| \geq 0.1) \to 0 \ , \quad \text{kun } n \to \infty.$$

Tentissä saa olla mukana "matematiikan kaavoja"-arkki, todennäköisyyslaskennan kaavakokoelma ja taskulaskin.