

Todennäköisyyslaskenta I, tentti 19.11.2012 (3 tuntia)

Ratkaise alla olevista tehtävistä neljä tehtävää.
Arvioinnissa huomioidaan neljä parasta, mikäli ratkaisit useamman.
Käytä ratkaisuisissa mahdollisimman selkeitä merkintätapoja.

- Q Olkoot tapaukset A ja B riippumattomia siten, että $P(A) = 0.75$ ja $P(B) = 0.60$.
- Millä todennäköisyydellä ainakin toinen tapahtumista A tai B tapahtuu?
 - Millä todennäköisyydellä B tapahtuu, kun tiedetään, että ainakin toinen tapahtumista A tai B tapahtuu.

- Q a) Olkoon tapaukset A_1, A_2, \dots, A_n riippumattomat. Osoita, että tällöin pätee

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - (n-1) = 1 - \left(n - \sum_{i=1}^n P(A_i)\right)$$

- b) Olkoon X satunnaismuuttuja, jolle $P(X=0) = 1 - P(X=1)$.
Jos $E(X) = 3 \cdot \text{Var}(X)$, niin mikä on $P(X=0)$? $\begin{matrix} 1 - P(A_1) \\ = P(A_c) \end{matrix}$

- Q Vakuutusyhtiö luokittelee väestön kolmeen riskiryhmään, matala, tavanomainen ja korkea. Matalan riskin ryhmään kuuluvat henkilöt joutuvat yhden vuoden aikana onnettomuuteen todennäköisyydellä 0.05, tavanomaisen riskiryhmään kuuluvat todennäköisyydellä 0.15 ja korkean riskin ryhmään kuuluvat todennäköisyydellä 0.30. Väestöstä 20% kuuluu matalan, 50% tavanomaisen ja 30% korkean riskin ryhmään.
- Kuinka suuri osa väestöstä joutuu onnettomuuteen yhden vuoden aikana?
 - Jos vakuutuksenottaja ei joudu onnettomuuteen vuonna 2012, niin millä todennäköisyydellä hän kuuluu matalan riskin ryhmään? $c_h d^x$

- A Laske diskreetin satunnaismuuttujan X odotusarvo ja varianssi, kun satunnaismuuttujan todennäköisyydet generoiva funktio on $\left(\frac{2}{5}z + \frac{3}{5}\right)^{10}$.

- 5 Q Oleta, että X on jatkuva satunnaismuuttuja jonka momentit generoiva funktio on olemassa. Miten satunnaismuuttujan X eri momentit voidaan tällöin laskea?

- Q Oleta, että $X \sim N(0,1)$. Laske satunnaismuuttujan X momentit generoivan funktion avulla satunnaismuuttujan X odotusarvo ja varianssi.

- 6 a) Määritellään satunnaismuuttuja $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, jossa $P(X_i = 1) = p$ ja $P(X_i = 0) = 1 - p$, $i = 1, \dots, n$. Oleta myös, että satunnaismuuttujat X_i ovat riippumattomat. Kirjoita tarkka todennäköisyys, että $P(S_{100} > 50)$.

- b) Miten voit hyödyntää keskeistä raja-arvolauseetta a)-kohdassa?