

Todennäköisyytlaskenta I, tentti 26.10.2012 (3 tuntia)

Ratkaise alla olevista tehtävistä neljä tehtävää.

Arvioinnissa huomioidaan neljä parasta, mikäli ratkaisit useamman.

Käytä ratkaisuisa mahdollisimman selkeitä merkintätapoja.

1. Neliön sivun pituus on $2a$. Neliön sisään on piirretty ympyrä, joka sivuaa neliön sivuja.

a) Neliöstä valitaan satunnainen piste (kaikki pisteet ovat yhtä todennäköisiä). Millä todennäköisyydellä piste osuu ympyrän ulkopuolelle?

b) Kun neliöstä valitaan 5 satunnaista pistettä, niin millä todennäköisyydellä 4 pistettä on ympyrän ulkopuolella ja yksi ympyrässä?

2. a) Oletetaan, että tapaukset A , B ja C ovat riippumattomia ja $P(A) = P(B) = P(C) = p > 0$. Osoita, että jos $P(A \cup B \cup C) = 1$, niin $p = 1$.

b) Olkoon $p(k) = P(X = k)$, ja satunnaismuuttuja $X \sim \text{Bin}(n, p)$. Osoita, että tällöin pätee:

$$\frac{p(k+1)}{p(k)} = \frac{(n-k)p}{(k+1)(1-p)}$$

3. Oleta, että satunnaismuuttujalle X pätee $P(X = 1) = p$ ja $P(X = 0) = 1 - p$, $p > 0$. Laske satunnaismuuttujan odotusarvo, todennäköisyydet generoiva funktio ja momentti generoiva funktio. Mitkä ovat satunnaismuuttujan momentit?

4. Matti ostaa käytetyn auton jolla on ajettu 150000 km. Mikä on todennäköisyys, että Matti ajaa autolla vielä vähintään 100000 km lisää, kun uuden auton käyttöikää kuvaava satunnaismuuttuja on

a) eksponenttijakautunut odotusarvona 250000 km,

b) tasaisesti jakautunut välille (100000 km, 400000 km)?

5. Oletetaan, että satunnaismuuttujan X todennäköisyysfunktio on

$$P(X = k) = \frac{1}{n+1}$$

kun $k = 0, 1, \dots, n$. Johda satunnaismuuttujan X odotusarvo, varianssi ja todennäköisyydet generoiva funktio.

6. Olkoon $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, johda satunnaismuuttujalle X sellainen a , että

$$P(\mu - a\sigma < X < \mu + a\sigma) \geq 0.9$$

b) Jos $X \sim N(10, 4)$, niin millä odotusarvokeskisellä välillä X on ainakin 90:n prosentin todennäköisyydellä?

c) Kirjoita keskeinen raja-arvolause.