$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\, u_1 + \ldots$

Usean muuttujan funktiot I, koe 22.10.2012
kesto n. 3 h

$f(A \cap B(x_0, \delta)) \subset B(f(x_0), \varepsilon)$

1. Olkoon $\mathbf{x}_0 \in A \subset \mathbb{R}^n$. Miten määritellään se, että kuvaus $f : A \to \mathbb{R}^m$ on jatkuva pisteessä $\mathbf{x}_0$? Osoita, että kuvaus $f : A \to \mathbb{R}^m$ on jatkuva pisteessä $\mathbf{x}_0$, jos ja vain jos $\lim_{k\to\infty} f(\mathbf{x}_k) = f(\mathbf{x}_0)$ aina, kun $(\mathbf{x}_k)$ on sellainen jono, että $\mathbf{x}_k \in A$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$ ja $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_0$.

2. (a) Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}$ A:n sisäpiste ja $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ vektori, jolle $\|\mathbf{u}\| = 1$. Olkoon $f : A \to \mathbb{R}$ funktio. Miten määritellään f:n suunnattu derivaatta $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x})$ pisteessä $\mathbf{x}$ suuntaan $\mathbf{u}$? Todista: Jos f on differentioituva pisteessä $\mathbf{x}$, niin $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x})$ on olemassa. Johda samalla $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x})$:lle laskukaava, jossa esiintyy $\nabla f(\mathbf{x})$.

(b) Määritellään funktio $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kaavalla

$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$

$$f(x, y) = \frac{e^{x^2 y}}{1 + x^2 + y^2}.$$

Määritä kullekin $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$, jolle $\|\mathbf{u}\| = 1$, suunnattu derivaatta $D_{\mathbf{u}}f(1, 0)$. Millä $\mathbf{u}$:n valinnalla $D_{\mathbf{u}}f(1, 0)$ on mahdollisimman suuri?

3. Olkoon

$$A = \{\, (x, y) \mid x \geq 0,\ 0 \leq y \leq \frac{x}{1 + x^4} \,\}.$$

Osoita, että A on avaruuden $\mathbb{R}^2$ suljettu osajoukko. Onko A kompakti? Osoita, että kaavalla

EI ∇

$$f(x, y) = xy$$

määritellyn funktion f joukossa A saamien arvojen joukossa on suurin ja pienin. Mitkä nämä suurin ja pienin arvo ovat?

4. Olkoon $E = \{\, (x, y, z) \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ 0 \leq x + y + z \leq 1 \,\}$. Määritä $\int_E f$ ja $\int_E g$, kun f määritellään kaavalla $f(x, y, z) = yz$ ja g kaavalla $g(x, y, z) = yz + xz + xy$.

5. Määritellään polku $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$ kaavalla

$$\gamma(t) = \left(t, \frac{1}{2}t^2, \frac{2}{3}t\sqrt{2t}\right).$$

Määritä $\int_\gamma f\, ds$ (integraali kaarenpituuden suhteen), kun funktio f on määritelty kaavalla $f(x, y, z) = xyz$.

$$\frac{x\left(\frac{1}{x}\right)}{x\left(\frac{1}{x} - x^3\right)} \qquad \to 0 \quad \to 0 \qquad x \to \infty \to \infty$$