

0, 4, 8, 3, 7, 2, 6, 1, 5
 0, 1, 4, 0, 7, 7, 0, 4, 1,
 0, 2, 7, 0, 2, 7, 0, 2, 7

$$7 + 9 \cdot 4 \equiv -7 \pmod{9}$$

$$2x^3 - x^2 + 4x \equiv 2 \pmod{9}$$

$$x(2x^2 - x + 4) \equiv 2 \pmod{9}$$

4, 8, 3, 7

Algebran peruskurssi I
 Tentti (kesto n. 3h), 16.4.2018

Tentissä saa olla mukana kirjoitusvälineet, sallittu laskin ja matematiikan kaavoja -arkki.

1. (a) Ratkaise Eukleideen algoritmilla lineaarinen kongruenssi $84x \equiv 7 \pmod{241}$.
 (b) Anna kongruenssin $2x^3 - x^2 + 4x + 7 \equiv 0 \pmod{9}$ kaikki ratkaisut.

2. Tarkastellaan multiplikatiivista ryhmää $(\mathbb{Z}_{42}^*, \cdot)$.

- (a) Luettele ryhmän \mathbb{Z}_{42}^* alkiot.
 (b) Muodosta aliryhmä $H = \langle 25 \rangle$.
 (c) Etsi jäännösluokan $\overline{25}$ käänteisalkio ryhmässä \mathbb{Z}_{42}^* .
 (d) Anna indeksi $[\mathbb{Z}_{42}^* : H]$.

3. Olkoot G ryhmä ja H sen aliryhmä. Määritellään joukko

$$xHx^{-1} = \{xhx^{-1} \mid h \in H\}, \text{ missä } x \in G.$$

- (a) Osoita, että xHx^{-1} on ryhmän G aliryhmä.
 (b) Osoita, että leikkaus

$$K = \bigcap_{x \in G} xHx^{-1}$$

on ryhmän G normaali aliryhmä.

4. (a) Tarkastellaan funktioavaruudessa $F(\mathbb{R})$ osajoukkoa

$$U = \{f \in F(\mathbb{R}) \mid f(\pi) = 0\}.$$

Osoita, että U on funktioavaruuden $F(\mathbb{R})$ aliavaruus.

- (b) Osoita, että funktiot $\sin(x)$, x^2 ja 3^x ovat lineaarisesti riippumattomia funktioavaruudessa $F(\mathbb{R})$.

4-5

4-5

1

2

Handwritten notes and calculations:

- $84x = 7$
- $2x$
- $f(a) * f(b) = f(a \oplus b)$
- $U + V$
- X^3
- $X_1 + X_2 \in U$
- $a \in \mathbb{R}$
- $aX_2 \in U$
- $3H \frac{1}{3} \cap 2H \frac{1}{2}$
- XHx^{-1}