

Algebran peruskurssi I  
Tentti (kesto n. 3h), 26.2.2020

Tentissä saa olla mukana kirjoitusvälineet, sallittu laskin ja matematiikan kaavoja -arkki.

1. (a) Ratkaise Eukleideen algoritmilla kongruenssi

$$43x \equiv 7 \pmod{335}. \quad (4 \text{ pistettä})$$

- (b) Laske jakojäännös, kun luku  $2^{2020} + 2020^{26}$  jaetaan luvulla 9. (4 pistettä)

2. Tarkastellaan multiplikatiivista ryhmää  $(\mathbb{Z}_{22}^*, \cdot)$ .

- (a) Luettele ryhmän  $\mathbb{Z}_{22}^*$  alkiot. (2 pistettä)

- (b) Osoita, että  $\mathbb{Z}_{22}^*$  on syklinen ryhmä. (2 pistettä)

- (c) Osoita, että kuvaus

$$f : (\mathbb{Z}_{22}^*, \cdot) \rightarrow (\mathbb{Z}_{22}^*, \cdot), f(x) = x^2,$$

on ryhmähomomorfismi. (2 pistettä)

- (d) Määritä ryhmähomomorfismin  $f$  ydin ja kuva. (2 pistettä)

3. Olkoot  $G$  ryhmä ja  $H$  sen aliryhmä.

- (a) Määritellään relaatio  $\sim$  ryhmässä  $G$  seuraavasti:

$$a \sim b \iff a^{-1}b \in H.$$

Osoita, että relaatio  $\sim$  on ekvivalenssirelaatio ryhmässä  $G$ . Osoita lisäksi, että ekvivalenssiluokka  $[a] = aH$  kaikilla  $a \in G$ , missä  $aH$  on aliryhmän  $H$  vasen sivuluokka. (4 pistettä)

- (b) Esitä ja todista Lagrangen lause. (4 pistettä)

4. (a) Olkoon  $(V, +, \cdot)$  vektoriavaruus. Osoita, että vektoriavaruuden nollavektori  $\theta$  on yksikäsitteinen ja että samoin on jokaisen vektorin  $X \in V$  vastavektori  $-X$ . (4 pistettä)

- (b) Osoita, että funktiot  $\cos(x)$ ,  $\sqrt{|x|}$  ja  $2^{-x}$  ovat lineaarisesti riippumattomia funktioavaruudessa  $F(\mathbb{R})$ . (4 pistettä)