

Insinöörimatematiikka D

Tentti 16.4.2018

noin 3 tuntia

Tentissä saa olla mukana matematiikan kaava-arkki ja ei-graafinen, ei-symbolinen laskin.

Vastaa tehtävissä kaikkiin kohtiin.

1. (a) Muunna redusoituun porrasmuotoon matriisi

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

- (b) Ovatko vektorit $\mathbf{u}_1 = (1, 2, 0, 5)$, $\mathbf{u}_2 = (1, 1, 1, 2)$, $\mathbf{u}_3 = (1, 0, 2, -1)$ ja $\mathbf{u}_4 = (2, 1, 3, 1)$ lineaarisesti riippumattomat? Perustele.
- (c) Vektorit \mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2 , \mathbf{u}_3 ja \mathbf{u}_4 generoivat avaruuden \mathbb{R}^4 aliavaruuden $U = L(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4)$. Mikä on $\dim(U)$? Ilmoita kanta aliavaruudelle U .

2. Olkoot

$$\mathbf{u} = (-1, -3) \quad \text{ja} \quad \mathbf{v} = (2, 5).$$

- (a) Ilmoita avaruuden \mathbb{R}^2 mikä tahansa vektori (x, y) vektorien \mathbf{u} ja \mathbf{v} lineaarikombinaationa.
- (b) Laske sitten $f(x, y)$, kun $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ on lineaarikuvaus ja

$$f(\mathbf{u}) = (1, 1, 2) \quad \text{ja} \quad f(\mathbf{v}) = (-1, 0, 1).$$

3. Olkoon A matriisi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$$

- (a) Laske matriisin A ominaisarvot.
- (b) Laske ominaisarvoihin kuuluvat ominaisvektorit.
- (c) Ilmoita sellaiset matriisit D ja P , joista D on diagonaalimatriisi ja P on kääntyvä matriisi ja $A = PDP^{-1}$.

4. (a) Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$y' = (y + 1) \cos x.$$

- (b) Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$y'' - 7y' + 12y = 0.$$