Algebran peruskurssi II

Tentti (kesto 3h), 27.4.2020

Etätentissä saa käyttää apuna luentomonistetta, luentomuistiinpanoja ja luentokalvoja sekä demotehtäviä ja niiden ratkaisuja. Myös (graafisen ja symbolisen) laskimen käyttö on sallittua. Tentti tulee kuitenkin tehdä **itsenäisesti** ja **ilman internetin apua**. *Kiinnitä ratkaisuissasi erityistä huomiota perusteluihin; pelkistä oikeista vastauksista / tuloksista ei saa täysiä pisteitä.*

1. Määritellään symmetrisessä ryhmässä S_9 permutaatio

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 3 & 6 & 9 & 5 & 2 & 4 & 8 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Esitä permutaatio α syklimuodossa. (2 pistettä)

   (b) Määritä permutaation α kertaluku. (2 pistettä)

   (c) Määritä permutaation α merkki ja selvitä, kuuluuko se alternoivaan ryhmään A_9. (2 pistettä)

   (d) Etsi permutaation α käänteisalkio. (2 pistettä)

2. Käytetään luonnollisten lukujen joukosta merkintää $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Tarkastellaan rationaalilukujen renkaassa $\mathbb{Q}$ (tavallisen yhteen- ja kertolaskun suhteen) osajoukkoa

$$S = \left\{ \frac{a}{2^n} \mid a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

   (a) Osoita, että S on renkaan $\mathbb{Q}$ alirengas. (6 pistettä)

   (b) Selvitä, mitkä ovat renkaan S yksiköt. (2 pistettä)

3. Vastaa lyhyesti seuraaviin kohtiin.

   (a) Tutki, onko kuvaus $f : \mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_{12}$, $f(x) = 5x$, rengashomomorfismi, missä $\mathbb{Z}_{12}$ on siis tuttu jäännösluokkarengas tavanomaisten yhteen- ja kertolaskujen suhteen. (2 pistettä)

   (b) Totea, että $\mathbb{Z}_{43}$ on kunta. Sievennä kunnassa $\mathbb{Z}_{43}$ lauseke

$$\frac{\overline{1}}{\overline{25}} + \frac{\overline{4}}{\overline{17}}. \text{ (3 pistettä)}$$

   (c) Laskuharjoitusten perusteella tiedetään, että äärellisessä kunnassa on p^n alkiota, missä p on alkuluku ja n on positiivinen kokonaisluku. Oletetaan annetuksi alkuluku q ja positiivinen kokonaisluku m. Kerro pääpiirteittäin, miten voit konstruoida äärellisen kunnan, jossa on q^m alkiota. (Muutaman rivin vastaus riittää.) (3 pistettä)

4. Olkoot R kommutatiivinen rengas ja I sen aito ihanne.

   (a) Osoita, että kommutatiivisen renkaan R ihanteella I on kaikilla $a, b \in R$ voimassa

$$ab \in I \implies a \in I \text{ tai } b \in I,$$

   jos ja vain jos tekijärengas R/I on kokonaisalue.

   (b) Osoita, että kommutatiivisen renkaan R maksimaalinen ihanne toteuttaa aina edellisen kohdan ehdon.