

# Algebran peruskurssi I

## Tentti 2.3.2023 klo 14–17

Tentti kestää 3 tuntia. Tentissä on sallittu kirjoitusvälineet, laitoksen kaava-arkki sekä laskin, joka ei kykene graafiseen eikä symboliseen laskentaan. Vastaa jokaiseen tehtävään ja perustele vastauksesi. Kurssin suoritukseen vaaditaan 15 pistettä (tentistä ja demohyvityksestä yhteensä).

Kirjoita tenttipaperiin tentin nimi, päivämäärä, oma nimi ja opiskelijanumero (tai syntymäaika).

- Osoita, että kaikilla kokonaisluvuilla  $n \in \mathbb{Z}$  pätee  $6 \mid (n^3 + 3n^2 - 4n - 12)$ . (4p.)
  - Ratkaise kongruenssi  $23x \equiv 4 \pmod{32}$  Eukleideen algoritmilla. (4p.)
- Tarkastellaan jäännösluokkaryhmää  $(\mathbb{Z}_{28}^*, \cdot)$ .
  - Luettele ryhmän  $\mathbb{Z}_{28}^*$  alkioit. (2p.)
  - Muodosta aliryhmä  $H = \langle \bar{3} \rangle$ . (2p.)
  - Perustele, miksi  $H$  on normaali aliryhmä. (2p.)
  - Määritä tekijäryhmän  $\mathbb{Z}_{28}^*/H$  kertaluku. (2p.)
- Määrittele käsitteet *syklinen ryhmä* ja *ryhmähomomorfismi*. (2p.)
  - Olkoon  $C$  syklinen ryhmä,  $G$  ryhmä ja  $f : C \rightarrow G$  ryhmähomomorfismi. Osoita, että kuva  $\text{Im}(f)$  on syklinen ryhmä. (6p.)
- Olkoon  $\mathbb{R}^\infty$  kaikkien reaalilukujonojen muodostama vektoriavaruus. Osoita, että

$$U = \{(x_n)_{n=0}^\infty \mid x_{n+1} = 2 \cdot x_n \text{ kaikilla } n \in \mathbb{N}\}$$

on sen aliavaruus. (4p.)

- Osoita, että funktioavaruuden  $F(\mathbb{R})$  vektorit  $e^x$ ,  $x - 1$  ja  $|x - 1|$  ovat lineaarisesti riippumattomia. (4p.)